МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
АКАДЕМИЯ НАУК РБ
СТЕРЛИТАМАКСКИЙ ФИЛИАЛ
ИНСТИТУТА СТРАТЕГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ РБ
БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
АДМИНИСТРАЦИЯ ГО Г. СТЕРЛИТАМАК

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

Материалы
Международной научной конференции
(г. Стерлитамак, 12 – 15 сентября 2021 г.)

Том I

УФА
РИЦ БашГУ
2021

УДК 517.95, 517.91, 532.546, 539.422.2
ББК 22.161
С56

Издание печатается по решению Ученых советов Стерлитамакского филиала Башкирского государственного университета и Стерлитамакского филиала Института стратегических исследований РБ и осуществлено при финансовой поддержке СФ БашГУ и Правительства Республики Башкортостан

Современные проблемы математики и физики: материалы Международной
С56 научной конференции (г. Стерлитамак, 12 – 15 сентября 2021 г.). Том I / отв. ред. А.И. Филиппов. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2021. – 384 с.
ISBN 978-5-7477-5327-3

Материалы в двух томах составлены из докладов, представленных на международную научную конференцию "Современные проблемы математики и физики", которые содержат новые результаты по спектральной теории дифференциальных операторов, теории краевых задач для дифференциальных уравнений и их приложения в механике многофазных систем, неравновесной термодинамике и математическом моделировании сложных систем. Также приведены результаты исследований актуальных проблем образования в школе и вузе.

Предназначено для специалистов в области физико-математических наук, преподавателей, аспирантов и студентов вузов.

ISBN 978-5-7477-5327-3 УДК 517.95, 517.91, 532.546, 539.422.2
ББК 22.161

Содержание

Секция 3. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Секция 4. ОБРАТНЫЕ И НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ

Секция 5. УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник материалов конференции в двух томах составлен на основе научных докладов, представленных ведущими учеными на Международную научную конференцию "Современные проблемы математики и физики посвященную 70-летию чл.-корр. АН РБ К.Б. Сабитова.

Основные направления работы (секции) конференции:

Секция 1. Спектральная теория дифференциальных операторов.

Секция 2. Теория функций и функциональный анализ.

Секция 3. Краевые задачи для дифференциальных уравнений.

Секция 4. Обратные и некорректные задачи.

Секция 5. Уравнения смешанного типа.

Секция 6. Математические проблемы механики.

Секция 7. Прикладные задачи термодинамики и теплофизики.

Секция 8. Математическое моделирование сложных процессов и систем.

Секция 9. Актуальные проблемы математического образования в школе и вузе.

В первый том вошли материалы секций 1–5, а во второй – секций 6–9. Статьи первого тома посвящены преимущественно фундаментальной математической проблематике, а второго тома - прикладной.

В материалах первой секции представлены новые достижения в области спектральной теории дифференциальных операторов. Рассмотрены актуальные проблемы существования и единственности решения для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений, в том числе в неограниченных областях. Представляют существенный интерес результаты по уравнениям с дробными производными высокого порядка, дискретной задаче Римана, задачам с нелокальными граничными условиями и т.п. Полученные результаты иллюстрируются на примерах конкретных практических задач о квантовых графах, колебаниях балки, теории фильтрации и ориентированы на создание новых алгоритмов решения прямых и обратных задач.

Во второй секции освещены проблемы устойчивости базисов из возмущенных систем экспонент, частично интегральных операторов в конкретных пространствах, разрешимости в малом эллиптических уравнений высокого порядка в симметричных пространствах, единственности решения частно-интегрального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром в анизотропных пространствах Лебега и т.д.

Рассмотрены неравенства Колмогорова для пространств Соболева, весовой частно-интегральный оператор и оператор Киприянова с отрицательными показателями операторов Бесселя, приведены явные решениях двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сильно-особыми линиями.

Материалы третьей секции наиболее обширно представлены в настоящем сборнике и содержат статьи, представляющие новые результаты по краевым задачам для дифференциальных уравнений. Рассмотрены задачи шредингеровской бегущей волны. исследованы единственность краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнения четвертого порядка с сингулярным коэффициентом и задачи с условием Геллерстедта на параллельных характеристичиках для одной специальной области, класс интегро-дифференциальных уравнений многоточечными и интегральными условиями. Рассмотрены задача Коши для нагруженного одномерного волнового уравнения, а также задача с динамическим нелокальным условием для гиперболического уравнения. Исследованы проблемы интегрирования нелинейного уравнения SINE-GORDON с источниками.

В статьях четвертой секции развита теория обратных и некорректных задач. Рассмотрены обратная задача по определению мест и источников начала колебания мембраны, проблемы разрешимости задачи Коши для уравнения Лапласа и существование решения обратных коэффициентных задач для системы уравнений в частных производных.

Освещена проблемы интегрирования нагруженного уравнения КДФ с источником интегрального типа, трехмерных обратных задач восстановления магнитной восприимчивости по экспериментальным данным.

Цикл работ по исследованию уравнений смешанного типа представлен в материала секции 5. В представленных работах исследованы разрешимость задачи Келдыша для одного уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами, задача Дирихле для трехмерного уравнения смешанного типа с двумя плоскостями изменения типа, задача для нелокального уравнения смешанного типа дробного порядка с вырождением, задача с аналогом условия Франкля на отрезке вырождения для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения, исследованы краевые задачи для уравнений смешанного типа высокого порядка. Описаны результаты по расположению спектра задачи Трикоми для операторов смешанного эллиптико-гиперболического типа и сформулированы актуальные задачи в этом направлении. Приведены новые нелокальные спектральные эллиптические задачи, которые в общем случае не исследованы. Также описаны нерешенные задачи по нелокальной проблеме Франкля и задачи с отходом характеристики.

В материалах шестой секции представлены результаты исследований полей давления в трещинах гидроразрыва нефтегазовых пластов, процессов очистки и перемешивания углеводородов, процессов детонации в пузырьковой жидкости, акустических процессов в пористой среде. Освещены преобразования эквивалентности газодинамических сред, исследованы новые особенности процессов релаксации давления в трубопроводе, приведено решение задач волнового зондирования трубопроводов.

В материалах секции 7 представлены новые теоретические результаты по неравновесной термодинамике и теплофизике. Представляют значительный научный и практический интерес результаты по температурным эффектам при фильтрации жидкости в нестационарных полях давления. На основе развитых теоретических представлений обнаружены новые физические эффекты, определяющие вытесняющие свойства пористой среды. Получены новые результаты по теплофизическим процессам при солянокислотном воздействии. Обсуждается использование идей искусственного интеллекта при исследовании полей давления в пласте.

Проблемам математического моделирования сложных процессов и систем посвящено содержание секции 8. Обсуждаются проблемы и достижения математического моделирования и разработки вычислительных алгоритмов решения различных задач, описывающих очистку нефти от минерализованных частиц, роста фазы в реакторе. Представлены программные комплексы исследования процессов переноса радона в анизотропных геологических средах, динамики собственных колебаний жидкости в скважине, рассмотрены волны Стоунли на границе жидкого и твердого полупространств. Обсуждается математическое моделирование спроса на потребительское кредитование домашних хозяйств в России, представлены новые модели развития пандемии COVID-19.

В девятой секции представлены результаты исследований актуальных проблем образования в школе и вузе. Рассмотрено применение прикладной математики в задачах нефтедобычи, освещены проблемы дистанционного преподавания математики в вузе, роль метода проектов в повышении качества образовательного процесса, роль математики при подготовке инженеров-механиков.

Большинство статей печатается в авторской редакции.

Доклады отражают последние достижения научных исследований по указанным направлениям, ведущихся в России и мире. Работы, представленные в сборнике, демонстрируют высокий уровень квалификации авторов, представляют научный интерес, и будут полезны для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов, специализирующихся по теории дифференциальных уравнений и их приложений.

Редколлегия

ГОДЫ, ПОСВЯЩЁННЫЕ СЛУЖЕНИЮ НАУКЕ И ОБРАЗОВАНИЮ

А ВЕДЬ МОГ НЕ ПОСТУПИТЬ НА ФИЗМАТ

В своей автобиографии Камиль Басирович записал: "родился в д. Елембетово Стерлибашевского района БАССР в семье служащего". Всё верно, за исключением, пожалуй, одного: отец Басир Кабирович, служащим стал поневоле. В сорок первом добровольцем ушёл на фронт, а в сорок втором вернулся инвалидом I группы. К тяжёлому крестьянскому труду уже был бы негоден. Трудовую деятельность продолжил бухгалтером-ревизором Стерлибашевского района. Заново учился ходить, заново жить. Матери Миникамал Мухамадулловны - фронтовички-зенитчицы - не стало, когда Камилю Басировичу было двадцать: сказались фронтовые раны. Семья бухгалтера-ревизора района то и дело меняла место жительства. Из-за этого все трое детей родились в разных сёлах. Работа бухгалтера связана с цифрами. Возможно, это обстоятельство и повлияло на судьбу среднего сына в семье Сабитовых. Камиль с детства любил математику. В старших классах он уже лидировал на районных олимпиадах по физике, математике, химии. Неудивительно, что в юности Камиль видел своё будущее на инженерном поприще. Но мечту о нефтяном институте перечеркнула болезнь матери и последствия фронтовых ран отца. И уже в последний момент, 31 июля, родители решились отпустить сына в ближайший город, в котором имелся вуз. Так, в 1968 году серебряный медалист Тятер-Араслановской школы Камиль Сабитов подаёт документы на физико-математический факультет СГПИ. И... проваливает первый экзамен по математике. Проза жизни: в канун экзамена будущий профессор отравился. Спасибо ректору института И.И.Насырову: вызвал медалиста "на ковёр выслушал его и поставил условие: если второй экзамен по математике устно сдаст на пять, можно будет вести речь о пересдаче - случай беспрецедентный.

Окончив физмат с отличием в 1973 году, К.Б.Сабитов начинает трудовую деятельность ассистентом кафедры математики. Служба в армии не ослабила у парня страсть к математическим наукам. После демобилизации он поступает в аспирантуру Куйбышевского (Самарского) государственного педагогического института (КГПИ), к известному учёному профессору С.П.Пулькину, основателю Самарской школы математиков. На первом же собеседовании, вердикт профессора поверг аспиранта в шок: "У вас очень слабая подготовка, юноша. Надо будет подрасти до университетского уровня".

И действительно, уровень педагогического института, ориентированного на подготовку школьных учителей, в то время был далёк от университетского. Под руководством Пулькина, разработавшего для аспиранта специальную программу, он выучился в аспирантуре и блестяще защитил кандидатскую. А по возвращении сделал для себя соответствующие выводы. Возглавив кафедру математического анализа СГПИ и впоследствии - физико-математический факультет, он кардинально пересмотрел институтские программы, "перекроив"их под университетские.

Ещё одной несомненной удачей в своей судьбе Камиль Басирович считает стажировку в Новосибирском государственном университете. Здесь он понял одну истину: базовые курсы студентам должны читать ведущие специалисты, профессора. И дело не только в научных степенях. Именно на этих курсах специалисты имеют возможность готовить своих последователей из числа наиболее одарённых студентов. Это "открытие"скажется на принципах его руководства физматом СГПИ. С 1992 по 2007 годы Камиль Басирович сделает многое, чтобы базовые дисциплины обязательно вели профессора.

После окончания докторантуры при кафедре общей математики факультета ВМК МГУ в 1992 году, он стал первым, в полувековой истории этого вуза, доктором наук.

— **Расскажите о Ваших научных результатах.**

— Первые результаты мною были получены при исследовании на корректную постановку краевых задач типа Дарбу, Дирихле и Трикоми (задача Т) для уравнений смешанного типа с сильным характеристическим вырождением

$$x^n u_{xx} + \mathrm{sgn} y \cdot u_{yy} + c\,u = 0,\ n = const > 0,\ c = const, \tag{1}$$

в ограниченных и неограниченных областях. Были установлены точные по n классы решений уравнения (1), в которых доказаны теоремы единственности и существования регулярных решений указанных выше краевых задач в классе ограниченных вблизи линии $x = 0$ функций. Тем самым, известные результаты Келдыша М.В. для эллиптических уравнений были перенесены для уравнения смешанного типа (1). Эти результаты составили основное содержание кандидатской диссертации, защищённой в г. Куйбышев (ныне г. Самара) 2 апреля 1980 года под руководством известного учёного доктора физико-математических наук, профессора Пулькина С.П.

В дальнейшем под руководством В.А. Ильина, А.В. Бицадзе и Е.И. Моисеева из МГУ им. М.В. Ломоносова начал заниматься вопросами качественной и спектральной теории уравнений смешанного типа, моделирующие околозвуковые течения жидкости и газов, магнитогидродинамичиские течения с переходом через скорость звука. Эти исследования имеют также важное значение в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, теории оболочек с кривизной переменного знака, теории сопел Лаваля и плазмы.

Были установлены:

- качественные свойства решений краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных для обоснования корректности постановки краевых задач для уравнений смешанного типа с гладкой и негладкой линией изменения типа;

- спектральные свойства решений краевых задач для уравнений смешанного типа с гладкой и негладкой линией изменения типа;

- разработан метод спектрального анализа (аналога метода Фурье) для решения краевых задач для уравнений смешанного типа.

Приведённые выше результаты составили основное содержание докторской диссертации, защищённой 10 марта 1992 года.

В дальнейшем я вёл и веду исследования со своими учениками по следующим направлениям:

1) изучение качественных и спектральных свойств решений краевых задач для уравнений смешанного типа с гладкой и негладкой линией вырождения;

2) разработкой спектрального метода построения (аналога метода Фурье) решений краевых задач для уравнений смешанного типа;

3) разработкой численных методов решения краевых задач для уравнений и систем уравнений смешанного типа;

4) локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа второго и высоких порядков в прямоугольных областях;

5) обратные задачи для уравнений смешанного типа;

6) начально-граничные и обратные задачи для уравнений колебаний балок и пластин.

По результатам этих исследований опубликованы в центральной печати более 200 статей и монографии:

1. *Сабитов К.Б.* К теории уравнений смешанного типа. М.: Физматлит, 2014. 304 с.

2. *Сабитов К.Б.* Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного парабoло-гиперболического типа. М.: Наука, 2016. 272 с.

3. Отправлена в редакцию «Наука» новая монография «Обратные задачи уравнений математической физики».

За эти годы было подготовлено 35 кандидатов физико-математических наук. При моей поддержке защищены докторские диссертации: Репин О.А. (1998), Кризский В.Н. (2004), Раджабова Л.Н. (2008), Михайлов П.Н. (2009), Кожевникова Л.М. (2009), Дорофеев А.В. (2011).

— Какие результаты были достигнуты в годы Вашего деканства?

— С 1981 года на базе физико-математического факультета СГПИ организовал и руководил научным семинаром по теории дифференциальных уравнений. Из участников семинара более 50 человек закончили аспирантуру, из них более 40 успешно защитили диссертации.

В 1994 году по моей инициативе, впервые в истории СГПИ на базе физико-математического факультета открыта аспирантура по 3-м специальностям: 01.01.02 – дифференциальные уравнения; 01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы; 01.04.15 – молекулярная физика и теплофизика, что стало возможным благодаря приглашению д.т.н., проф. Филиппова А.И. из БашГУ на наш факультет при поддержке тогдашнего главы города Ахметова С.Г., т.е. город обеспечил семью Филиппова А.И. жильем.

Будучи профессором кафедры математического анализа СГПИ, читал лекции по математическому анализу, по теории функций вещественной и комплексной переменной, дифференциальным уравнениям, уравнениям математической физики; разработал различные спецкурсы по специализациям: дифференциальные уравнения, уравнения математической физики. Написал студентам учебные пособия:

1. Уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 2003. 256 с.

2. Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения. М.: Высшая школа, 2005. 672 с.

3. Основные элементарные функции. М.: Высшая школа, 2010. 176 с.,

которые опубликованы под грифом УМО и Министерства образования и науки РФ.

В 2013 г. в издательстве «Физматлит» вышло второе издание «Уравнения математической физики» в качестве учебника для университетов страны. Подготовлено третье издание этого учебника, планируется опубликовать в этом году в «Физматлит».

Как декан физико-математического факультета особое внимание уделял созданию центра новых информационных технологий, научно-исследовательских лабораторий и семинаров при кафедрах, применению вычислительной техники в учебном процессе и в научных исследованиях. За годы моего деканства (1992–2007) были созданы 5 новых кафедр (их стало 9 на физмате), так как при поддержке Ахметова С.Г. были приглашены известные ученые Шагапов В.Ш., Мукминов Ф.Х. и др. Факультет значительно вырос в научном отношении, остепененность преподавателей достигла 90%.

Принимал участие в различных мероприятиях в области школьного и вузовского математического образования. В течение более 10 лет являлся председателем жюри Республиканской математической олимпиады школьников, которые проводились на базе физмата СГПИ; членом научно-методического объединения математических кафедр Урала и Поволжья по линии Минобрнауки РФ. Являюсь членом НМС по прикладной математике и информатике УМО классических университетов России.

— Когда появилась идея об открытии в Стерлитамаке филиала Академии наук?

— В г. Стерлитамак к 1995 г. сложился достаточно высокий научный потенциал, в связи с чем при поддержке мэра города Ахметова С.Г., институтов (СГПИ, СФ УГНТУ, СФ БГУ) и крупных промышленных предприятий химии и нефтехимии 19 июня 1995 года на Общем собрании АН РБ мы обратились с предложением о создании филиала АН РБ в г. Стерлитамак. Наша инициатива, прежде всего, была поддержана тогдашним Президентом АН РБ академиком РАН Нигматулиным Р.И., а затем и Общим собранием. В решении Общего собрания АН РБ появилась строка о создании в г. Стерлитамак опорной научной базы – филиала АН РБ.

Вопрос о создании научного центра в г. Стерлитамак обсуждался в заседаниях Президиумов АН РБ и УНЦ РАН, по результатам которых были приняты постановления о необходимости создания филиала АН РБ на базе вузов и лабораторий крупных нефтехимических предприятий Южного региона РБ. Директором-организатором филиала был назначен я, и была проведена большая работа по реализации постановлений совместных Президиумов АН РБ и УНЦ РАН от 15.12.1995 г. и 14.02.1996 г.

При поддержке руководства РБ в лице Премьер-министра РБ Бакиева Р.С. 25 ноября 1996 года вышло постановление №310 КМ РБ "Об открытии в городе Стерлитамак филиала АН РБ"для решения научных задач в области экологии, конверсии, природопользования и здравоохранения, создания новых технологий, подготовки научно-педагогических кадров, а также проведения фундаментальных исследований в области социально-гуманитарных и медико-биологических наук, математического моделирования сложных естественно-научных систем, плазмохимических технологий, в целях социально-экономического развития Юго-западного региона РБ.

В период становления филиала существенную поддержку оказали вице-президенты АН РБ: академик АН РБ, чл.-корр. РАН Ильгамов М.А., академики АН РБ Гумеров А.Г., Ураксин З.Г., Вахитов В.А.; академики-секретари отделений академики АН РБ Бакиев А.В., Магазов Р.Ш., Абдрахманов И.Б. и чл.-корреспонденты АН РБ Мазунов В.А., Галяутдинов И.Г., Хазиев Ф.Х. и другие члены АН РБ. Затем большую поддержку оказали будучи президентом АН РБ Ильгамов М.А., вице-президент АН РБ Кунакова Р.В. и др. члены президиума АН РБ.

В составе СФ АН РБ созданы 5 отделов и 19 лабораторий на базе Вузов и НТЦ крупных предприятий южного региона РБ. За годы деятельности филиала (института) совместно вузами региона защищены 40 докторских и более 180 кандидатских диссертаций, проведены 13 научных конференций регионального, 15 - всероссийского, 7 - международного уровня, школы и совещания-семинары. Издано 55 сборников научных трудов, 87 монографий, 204 учебников, 7102 статей в центральной и зарубежной печати, более 300 патентов на изобретения.

За эти годы на юге республики сложилось несколько научных школ по механике многофазных систем (рук. Шагапов В.Ш.), по дифференциальным уравнениям (рук. Сабитов К.Б.), по теплофизике (рук. Филиппов А.И.) и др. В числе научных достижений филиала относятся работы профессора И.Ю.Хасанова по разработке комплексной системе предупреждения и ликвидации аварий и их последствий на магистральных нефтепроводах. Созданы фильтры для системы магистрального трубопроводного транспорта нефти, камеры для технического обслуживания и проведения ремонтных работ на трубопроводе в условиях болот и обводненной местности, Всесезонный комплекс для локализации и сбора нефти с поверхности воды, сепаратор для дегазации и фракционирования нестабильных газовых конденсатов и многое другое. И не просто созданы, а внедрены на ведущих предприятиях страны, таких как "Транснефть "Башнефть "Татнефть "Газпром"и других. Сейчас фильтрами-грязеуловителями оснащены все магистральные нефтепроводы страны в т.ч. Балтийская трубопроводная система, Каспийский трубопроводный консорциум, система трубопроводов Восточная Сибирь - Тихий Океан и другие.

В нашем регионе не редки заболевания щитовидки из-за недостатка йода в почве. В связи с чем в Стерлитамакском филиале АН РБ на базе филиала МГУ Технологий и управления в 2004 году была создана лаборатория Пищевых технологий под руководством докторов биологических наук А.Н.Мамцева и В.Н.Козлова, где был синтезирован новый БАД и на Мелеузовском молочноконсервном комбинате разработана и налажена технология производства пастеризованного молока, обогащённого йодом.

Юг Башкирии - крупный промышленный центр. В связи с чем была создана лаборатория перспективных конструкций и моделирования технологических аппаратов под руководством члена-корреспондента АН РБ А.К.Панова. Только с 1991 по 2006 годы на предприятиях города было внедрено 13 научно-технических разработок с общим годовым экономическим эффектом более 50 млн. рублей в ценах тех лет. В стенах филиала шла и интенсивная научная работа. О достижениях стерлитамакских учёных знают не только в России, но и далеко за рубежом. Здесь велись совместные изыскания с учёными зарубежных стран. Словом, СГПИ созрел для открытия специализированного учёного совета по защите диссертации.

- Но убедить Высшую аттестационную комиссию России в необходимости его открытия было архисложно, - признаётся Камиль Басирович. - Мы многократно обращались с письмами в ВАК. А сколько раз я сам лично выезжал в Москву! Порой опускались руки. Существенную помощь нам оказали академики РАН В.А.Ильин и Р.И.Нигматулин. На заседании президиума ВАКа наш вопрос выносился три раза. И всё же, в декабре 2003 снова при поддержке Р.И.Нигматулина года при СГПИ диссертационный совет на соискание учёной степени кандидата наук был открыт. Здесь состоялись защиты 40 кандидатских диссертаций (в том числе из Уфы, Самары, Москвы, Новосибирска, Челябинска, Магнитогорска, Орска).

— Как Вы оцениваете качество подготовки в Вузах?

— Увы, качество подготовки в вузах падает. И это падение закладывается уже в школе, одна из основных причин этого — ЕГЭ. При подготовке к ЕГЭ учеников натаскивают на решение определённого типа задач в ущерб формированию научного мировоззрения и навыков самостоятельной работы над учебниками и специальной литературой. Первые три года введение ЕГЭ я поддерживал, так как преподаватели не привлекались в приемную комиссию и полноценно отдыхали в летнее время, но затем стало прослеживаться заметное падение уровня подготовки выпускников школ. Считаю, что ЕГЭ нужно отменить и вернуться к прежней системе обучения, то есть по всем основным дисциплинам ввести госэкзамены. Если ЕГЭ не отменять, то хотя бы дать право вузам по каждой специальности ввести один устный или письменный экзамен, что уравняет шансы тех, кто сдал ЕГЭ самостоятельно без посторонней помощи. Это предложение было озвучено не так давно ректором МГУ академиком РАН В.А.Садовничим. Это поможет снять наболевшие проблемы:в наши Вузы придут более подготовленные выпускники, значительно уменьшиться отток молодежи в другие регионы.

Другая причина - в процессах оптимизации в самих вузах, которые начались после известного Указа Президента РФ от 2012 года. Не углубляясь в подробности, отмечу реальное сокращение часов. Например, по какой-то дисциплине на обучение выделяется 100 часов, из них 50% отводится на самостоятельное изучение студентами, а при этом на проверку знаний никаких часов не планируется, хотя в зачетке студента изучение этого предмета оформляется на все 100 часов.

Уменьшились часы на выполнение курсовых и дипломных работ. В некоторых вузах отменили даже госэкзамены. В связи с чем, отменены также и обзорные лекции по подготовке к госэкзаменам. Эти экзамены играют важную роль в подготовке выпускников вузов, так как чтение обзорных лекций и сдача госэкзаменов дают возможность выпускникам на более высоком уровне пройти по изученным ранее дисциплинам, осознать их важность, понять и разобраться в тех вопросах, которые остались не изученными на младших курсах. Я убедился в этом на своем опыте.

Последние годы идет значительное сокращение базовых дисциплин, например, раньше курс высшей математики в технических Вузах велся в течение первых четырех семестров, а теперь планируется вести только на первом курсе.

— Камиль Басирович, вы долгие годы являетесь членом Президиума Академии наук Башкортостана и директором Стерлитамакского филиала АН РБ. Как вы оцениваете роль Академии наук РБ в нашем обществе?

— Созданная в 1991 году указом первого Президента РБ Рахимова М.Г. Академия наук сыграла и играет важную роль в нашем обществе. Её создание позволило в тяжелые 90-е годы сохранить научный потенциал республики, остановило отток учёных из Башкортостана. В 1996 и чуть позже были открыты филиалы АН РБ в Стерлитамаке и Сибае. Особенно активными периодами в работе Академии стали годы, когда её возглавляли академик РАН Р.И.Нигматулин, член-корреспондент РАН М.А.Ильгамов. Затем последовал определенный спад. Академия координировала научную деятельность всей республики, финансировала проекты учёных по наиболее важным в практическом плане направлениям. Вела активную работу по подготовке научных кадров путём выделения средств аспирантам и их научным руководителям. Планировала и активно помогала в проведении многочисленных научных семинаров и конференций различного уровня. Самое главное, вела фундаментальные исследования по социально-гуманитарным, медико-биологическим, сельскохозяйственным, физико-математическим и техническим наукам. Эти исследования всегда поддерживались грантами самой Академии, РФФИ, РГНФ, РНФ. К сожалению, в последние годы уделялось мало внимания развитию и сохранению АН РБ. Сокращены средства на исследовательские проекты по отделениям, на подготовку аспирантов, на проведение научных конференций. Не индексированы стипендии членам АН РБ, хотя в других госакадемиях это давно сделано.

Чтобы оживить работу АН РБ, думаю - надо привлечь в руководство известных в РБ и РФ учёных своими крупными достижениями и обладающими организаторскими способностями.

Академия наук - это символ суверенитета нашей республики, ее надо всячески поддерживать и развивать, сохранить филиалы в городах Стерлитамак и Сибай. В противном случае ее следует назвать Академией наук г. Уфы.

Наука, как писал выдающийся ученый В.А. Стеклов, есть нравственный образователь человечества, выражающий высшую степень образованности человеческого общества.

— **Каково Ваше отношение к объединению вузов РБ?**

— Прежде чем ответить на этот вопрос, давайте обратимся к опыту наших соседей. В Самарской области, когда губернатором был Н.И.Меркушин (2014-2017 гг.), путём объединения Самарского государственного технического университета (бывшего политехнического института) и Самарского государственного архитектурно-строительного университета был создан в 2015 году опорный вуз Сам ГТУ, а в 2016 году был создан Самарский национальный исследовательский университет им.С.П.Королёва путем объединения Самарского государственного авиационного университета и Самарского госуниверситета. При этом область добилась привлечения дополнительных средств из центра для развития науки и образования, однако спустя годы выяснилось, что часть научных кадров СГУ и СГАСУ ушла в другие вузы области и регионы. По существу эти два вуза потерялись в этих объединениях, и число вузов сократилось на два. В эти годы я работал на полставки в двух вузах Самары: педагогическом университете и СГАСУ, руководил научной работой аспирантов и соискателей и для этих вузов подготовил 10 кандидатов физико-математических наук, одна из них стала доктором наук. Поэтому ситуацию по объединению вузов знаю изнутри.

В Татарстане в 2010 году подали заявку на создание Федерального университета путём объединения трёх вузов: КГУ, КГПУ и Казанской экономической академии, они выиграли в этом конкурсе. Но мы, к сожалению, с опозданием подали заявку на создание Федерального университета путём объединения трёх вузов: БГУ, СГПА и БГПИ и не выиграли конкурс.

В 2009-2010 гг. при финансовой поддержке Правительства РТ Казанский государственный авиационный университет и Казанский химико-технологический университет приняли участие в конкурсе на создание национально-исследовательских университетов и стали победителями. Руководство РТ в 2012 году пошло на создание инновационного университета Иннополис на новой площадке типа "СКОЛ-

КОВО"в Московской области, где обучаются около 800 студентов с привлечением более 260 преподавателей из 24 стран с опытом работы в ведущих кампаниях мировой ИТиндустрии. По итогом 2020 года этот университет опубликовал 310 статей на базе Scopus, выиграл 55 грантов и проектов на сумму 6201 млн. руб. и привлек 434,2 млн. руб. спонсорских средств из различных компаний. Появление новых университетов в Татарстане мне довелось наблюдать являясь долгие годы членом диссертационного совета при Институте математики и механики КГУ, затем КФУ.

Выступая с новой инициативой создания НОЦ Евразийский университет путём объединения двух крупных университетов УГАТУ и БГУ, Глава Республики Башкортостан Р.Ф. Хабиров желает исправить ранее допущенные ошибки и привлечь дополнительные финансовые средства из центра в РБ. При этом чрезвычайно важно, чтобы после объединения УГАТУ и БГУ, в новом составе не потерялись научные школы, образовательные направления и традиции, наработанные годами, как это случилось в Самаре, а наоборот, полученные финансовые средства способствовали бы их дальнейшему развитию.

— Камиль Басирович, где взять ресурсы для развития науки и образования кроме национальных проектов по этим областям?

— По Конституции нашей страны все имеют равные права на получение образования независимо, где они обучаются - в Стерлитамаке, Уфе, Москве т.д., поэтому Правительством РФ должны быть созданы равные условия для обеспечения данного конституционного права, что у нас не выполняется. Причиной тому является недостаточное финансирование Вузов и НИИ. Откуда взять средства? Прежде всего, ввести прогрессивную шкалу налогообложения, налог на роскошь как в других развитых странах Запада и Востока. Значительно сократить расходы на государственное и муниципальное управление. Н.И. Меркушин за 4 года руководства Самарской областью сократил расходы на госуправление с 11 млрд. до 8 млрд. и освободившиеся средства 3 млрд. направил на развитие науки и образования (Волжская коммуна, № 28 от 3 февраля 2017 г.).

В соседней республике Казахстан в этом году финансирование научных проектов увеличили в два раза, а к 2024 году планируют увеличить в 7 раз. В КНР планируют поднять финансирование науки в 17 раз. Отсюда идут успехи развития этих стран.

С НАДЕЖДОЙ НА БУДУЩЕЕ

И всё же профессор не теряет оптимизма. В условиях объединения ведущих вузов республики забрасывает вышестоящие инстанции письмами и обращениями, направленными на развитие науки и образования в городе. "Необходимо сократить отток молодёжи и научных кадров, — пишет он в одном из таких посланий. — Существенным шагом в этом направлении было бы создание самостоятельного вуза в Стерлитамаке, отвечающего современным трендам в плане подготовки высоковалифицированных кадров для промышленных предприятий юга республики, реализации проектов особой экономической зоны (ОЭЗ) "Алга" , школ и в целом для формирования крупной Южно–Башкортостанской агломерации "Стерлитамак–Салават–Ишимбай...".

Собственный корреспондент газеты
"Стерлитамакский рабочий" Фаяз ЮМАГУЗИН

Секция 1. СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

УДК 519.624.3

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ НА КВАНТОВЫХ ГРАФАХ, МОДЕЛИРУЮЩИХ АРОМАТИЧЕСКИЕ СОЕДИНЕНИЯ

Кадченко С.И. [1] **, Ставцева А.В.** [2]

[1] *Магнитогорский государственный технический университет, г. Магнитогорск, Россия;*

[2] *Урал – Омега, Магнитогорск, Россия;*

sikadchenko@mail.ru, asilina74@mail.ru

Создание новых технологий приводит к необходимости в разработке вычислительно эффективных методов решения спектральных задач для дискретных полуограниченных операторов, заданных на множествах совокупных структур. Рассматриваемое в данном направлении исследование связанно с квазиодномерным движением электронов в ароматических соединениях. Считая ширину трубок, в которых движутся электроны, малыми, можно считать, что они двигаются по сети состоящую из одномерных проводников. В силу этого используются основные положения новых методов решения динамических спектральных задач для дискретных полуограниченных операторов, заданных на квантовых графах. Проведены вычислительные эксперименты для атома нафталина.

Ключевые слова: квантовые графы, дискретные полуограниченные операторы, собственные функции и собственные операторы, некорректно поставленные задачи, интегральные уравнения Фредгольма первого рода, асимптотические формулы.

ALGORITHM FOR SOLVING INVERSE SPECTRAL PROBLEMS ON QUANTUM GRAPHS MODELING AROMATIC COMPOUNDS

Kadchenko S.I. [1] **, A. V. Stavtseva F.V.** [2]
[1] *Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russia;*
[2] *Ural - Omega, Magnitogorsk, Russia;*
sikadchenko@mail.ru, asilina74@mail.ru

Creation of new technologies leads to a need for the development of computationally efficient methods for solving spectral problems for discrete Semiboundedness s x operators defined on the sets of aggregate structures. The study considered in this direction is associated with the quasi-one-dimensional motion of electrons in aromatic compounds. Considering the width of the tubes in which the electrons move to be small, we can assume that they move along a network consisting of one-dimensional conductors. Because of this, the main provisions of new methods for solving dynamic spectral problems for discrete semi-bounded operators defined on quantum graphs are used. Computational experiments for the naphthalene atom.

Key words: quantum graphs, discrete semi-bounded operators, eigenfunctions and eigenvalues of operators, ill-posed problems, Fredholm integral equations of the first kind, asymptotic formulas.

Разработка новых технологий в науке и технике требует создание новых численных методов решения обратных спектральных задач на квантовых графах [1]. Одно из таких направлений связано с математическим моделированием квазиодномерных движений π - электронов в ароматических соединениях [2].

В статьях [3 – 5] разработанны вычислительно эффективные методы решения обратных спектральных задач, порожденных дискретными полуограниченными операторами, заданных на множествах различной природы. Они позволяют находить решения задач для дифференциальных операторов высокого порядка и для конечных квантовых графах с любой конфигурацией и с большим числом ребер. Применим эти методы для моделирования квазиодномерных движения электронов в молекуле нафталина $C_{10}H_8$ [5]. Для этого рассмотрим конечный ориентированный связанный граф $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ с соединенными ребрами, множеством вершин $\boldsymbol{V} = \{V_i\}_{i_1}^{i_0}$ $(i_0 = 10)$ и множеством ребер $\boldsymbol{E} = \{E_j\}_{j=1}^{j_0}$, $(j_0 = 11)$ (см.

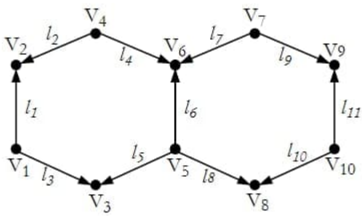
рис. 1). Каждое ребро E_j графа $\boldsymbol{G}$ имеет длину l_j. Так как длины всех ребер для молекулы нафталина одинаковые, то можно считать, что $l_j = 1$ для всех $j = \overline{1,11}$. На графе $\boldsymbol{G}$ зададим вектор-оператор Шрёдингера $\boldsymbol{L} = (L_1, L_2, \dots, L_{j_0})$, действующий на волновую вектор-функцию $\boldsymbol{\Psi} = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{j_0})$. Для вектор-оператора $\boldsymbol{L}$ рассмотрим спектральные задачи

$$L_j\psi_j(s_j) \equiv -\frac{d^2\psi_j(s_j)}{ds_j^2} + v_j(s_j)\psi_j(s_j) = \mu\psi_j(s_j), \ s_j \in (0, l_j), \tag{1}$$

$$\sum_{E_k \in E^\alpha(V_s)} \frac{d\psi_k}{ds_k}\Big|_{s_j=0} - \sum_{E_m \in E^\omega(V_s)} \frac{d\psi_m}{ds_m}\Big|_{s_m=l_m} = 0, \tag{2}$$

$$\psi_i(0) = \psi_k(0) = \psi_m(l_m) = \psi_h(l_h). \tag{3}$$

Здесь $E_i, E_k \in E^\alpha(V_s)$, $E_m, E_h \in E^\omega(V_s)$, $E^\alpha(V_s)$ – множество дуг с началом в вершине V_s, $E^\omega(V_s)$ – множество дуг с концом в вершине V_s, $\psi_j(s_j),\ v_j(s_j) \in W_2^2[0, l_j]$. Условия (2) означают, что поток через каждую вершину должен равняться нулю, а (3) – что решение $\boldsymbol{\Psi} = (\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{j_0})$ в каждой вершине должно быть непрерывным. В зависимости от того, известны или нет потенциалы v_j в вектор-операторе $\boldsymbol{L}$, различают прямые или обратные спектральные задачи.



Ориентированный граф молекулы нафталина

Считая, что в операторе $\boldsymbol{L}$ либо часть, либо все функции $p_j(s_j)$ не заданы рассмотрим решение обратной спектральной задачи (1) - (3) по заданным спектральным характеристикам. Используя описанные в статье [5] методы построим алгоритм восстановления значений функций $p_j(s_j)$ в узлах дискретизации ребер $\boldsymbol{E}$ графа $\boldsymbol{G}$. Для этого нам понадобится невозмущенная прямая спектральная задача

$$-\frac{d^2\varphi_j(s_j)}{ds_j^2} = \lambda\varphi_j(s_j), \ s_j \in (0, l_j), \ j = \overline{1,11}, \tag{4}$$

$$\sum_{E_k \in E^{\alpha}(V_s)} \frac{d\varphi_k}{ds_k}\Big|_{s_j=0} - \sum_{E_m \in E^{\omega}(V_s)} \frac{d\varphi_m}{ds_m}\Big|_{s_m=l_m} = 0, \tag{5}$$

$$\varphi_i(0) = \varphi_k(0) = \varphi_m(l_m) = \varphi_h(l_h). \tag{6}$$

Система $\{\mathbf{\Phi}_n\}_{n=1}^{\infty}$ собственных вектор-функций $\mathbf{\Phi}_n = (\varphi_{1_n}, \varphi_{2_n}, \ldots, \varphi_{j_{0_n}})$ спектральной задачи (4)-(6) ортогональна и удовлетворяет граничным условиям (5)-(6). Если граф $\boldsymbol{G}$ конструктивно сложен и число его ребер велико, то находить собственные значения и собственные функции задачи (4)-(6) непосредственно сложно. Поэтому в среде Maple был написан пакет программ, позволяющий в автоматическом режиме по известным характеристикам конечного ориентированного связанного графа находить собственные значения и собственные вектор-функции задачи (4)-(6).

Обозначим через $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ собственные значения спектральной задачи (4)-(6), занумерованные в порядке невозрастания их величин. Используя написанный пакет программ получено трансцендентного уравнения

$$9\sin(\sqrt{\lambda}) + 17\sin(3\sqrt{\lambda}) + 25\sin(5\sqrt{\lambda}) + 17\sin(7\sqrt{\lambda}) + 9\sin(9\sqrt{\lambda}) = 0. \tag{7}$$

При решении уравнения (7) можно найти собственные значения λ_n для любого n. Соответствующие им компоненты φ_{j_n} собственных вектор-функций $\mathbf{\Phi}_n$ имеют вид

$$\varphi_{j_n} = C_n(A_{j_n}\sin(\sqrt{\lambda_n}s_j) + B_{j_n}\cos(\sqrt{\lambda_n}s_j)),\ j = \overline{1,11},\ n = \overline{1,\infty}. \tag{8}$$

Коэффициенты A_{j_n} и Bj_n найдены на основе пакета программ. Они не выписаны из-за ограничений на объем материалов доклада.

Значения потенциалов $p_j(s_j)$ в узлах дискретизации восстанавливаются по найденным собственным значениям $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ и соответствующие им собственные вектор-функциям $\mathbf{\Phi}_n$ невозмущенной задачи (4)-(6), а также по необходимому количеству приближенных собственных значений μ_n возмущенной задачи (1)-(3), принадлежащих отрезку $[c,d]$. Используя методику решения обратных спектральных задач, заданных на графах, описанную в статье [5] построим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_0^1 \sum_{j=1}^{11} \varsigma_j(s) K_j(x,s) v_j(s) ds = \widetilde{F}(x),\ x \in [c,d]. \tag{9}$$

Здесь $\varsigma_j(s) = \begin{cases} 1, & s \in [0, l_j], \\ 0, & s \notin [0, l_j], \end{cases}$ $K_j(x_n, s_j) = \varphi^2_{j_n}(s_j)$, $\widetilde{F}(x_n) = \mu_n - \lambda_n - \widetilde{\delta}_n$. Пусть $K_j(x_n, s_j)$ непрерывные и замкнутые в $\Pi = [c, d] \times [0, 1]$, $\widetilde{F}(x) \in L^2[c, d]$. Задача решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода (9) является некорректно поставленной. Для построения его приближенных решений $\widetilde{v}^\alpha_j$ используется метод регуляризации Тихонова, который приводит к системе уравнений [5]

$$\begin{cases} \alpha\varsigma_1(t)[\widetilde{v}^\alpha_1(t) - q(\widetilde{v}^\alpha_1)''(t)] + \sum\limits_{j=1}^{11} \int_0^1 \varsigma_j(s) R_{j1}(s,t) \widetilde{v}^\alpha_j(s) ds = \widetilde{F}_1(t), \\ \alpha\varsigma_2(t)[\widetilde{v}^\alpha_2(t) - q(\widetilde{v}^\alpha_2)''(t)] + \sum\limits_{j=1}^{11} \int_0^1 \varsigma_j(s) R_{j2}(s,t) \widetilde{v}^\alpha_j(s) ds = \widetilde{F}_2(t), \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ \alpha\varsigma_{11}(t)[\widetilde{v}^\alpha_{11}(t) - q(\widetilde{v}^\alpha_{11})''(t)] + \sum\limits_{j=1}^{11} \int_0^1 \varsigma_j(s) R_{j11}(s,t) \widetilde{v}^\alpha_j(s) ds = \widetilde{F}_{11}(t), \end{cases}$$

где $\int_0^1 Rji(s,t)\widetilde{v}^\alpha_j(s)ds = \int_0^1 \widetilde{v}^\alpha_j(s)\Big[\int_c^d K_j(x,s)K_i(x,t)dx\Big]ds$, $j, i = \overline{1, 11}$, $\widetilde{F}_j(t) = \int_c^d K_j(x,s)\widetilde{F}(x)dx$, $j = \overline{1, 11}$, $t \in [0, 1]$, α – параметр регуляризации. Проведенные вычислительные эксперименты показали высокую вычислительную эффективность разработанного алгоритма решения обратных спектральных задач моделирующие квазиодномерные движения π - электронов в молекуле нафталина.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лобанов И.С., Трифанова Е.С.* Прямые и обратные задачи в модели квантовых графов. Наносистемы: физика, химия, математика. 2012. Т. 3, № 5. С. 6–32.

2. *Golubok A.O., Popov I.U., Mukhin I.S., Lobanov I.S.* Creation and study of 2D and 3D carbon nanographs. Physica E. 2012. V. 44. P. 976–980.

3. *Кадченко, С.И., Закирова Г.А.* Численный метод решения обратных спектральных задач. Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2015. Т. 8. № 3. С. 116–126.

4. *Кадченко, С.И.* Численный метод решения обратных спектральных задач, порожденных возмущенными самосопряженными операторами. Вестник Южно-Уральского государственного университета.

Серия: Математическое моделирование и программирование. 2013. Т. 6. № 4. С. 15–25.

5. *Кадченко С.И., Пуршева А.В., Рязанова Л.С.* Решение обратных спектральных задач для дискретных полуограниченных операторов , заданных на геометрических графах. Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2020.Т. 13, № 4. С. 19-32.

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ В КЛАССАХ СОБОЛЕВА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ ПО ВРЕМЕНИ

Касимов Ш.Г., Бабаев М.М.

Национальный университет Узбекистана, г. Ташкент, Узбекистан;
shokiraka@mail.ru, babayevm@mail.ru

В данной работе изучена задача с начальными функциями и граничными условиями для дифференциальных уравнений дробного порядка в частных производных с запаздывающим аргументом по времени, со степени операторами Лапласа с пространственными переменными и нелокальными граничными условиями в классах Соболева. Решения начально-граничной задачи построено в виде суммы ряда по системе собственных функций многомерной спектральной задачи. У спектральной задачи найдены собственные значения и построена соответствующая система собственных функций. Показано, что эта система собственных функций является полной и образует базис Рисса в подпространствах Соболева. На основании полноты системы собственных функций доказана теорема единственности решения задачи. В подпространствах Соболева доказано существование регулярного решения поставленной начально-граничной задачи.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение в частных производных с запаздывающим аргументом, дробная производная по времени, начально-граничная задача, спектральный метод, собствен-

ные значения, собственные функции, полнота, базис Рисса, единственность, существование, ряд.

ON THE SOLVABILITY OF THE MIXED PROBLEM FOR AN EQUATION IN HIGH-ORDER PARTIAL DERIVATIVES WITH FRACTIONAL DERIVATIVES WITH A LAGGING ARGUMENT IN TIME, DEGREES OF LAPLACE OPERATORS IN SPATIAL VALUES IN SOBOLEV CLASSES

Kasimov Sh.G. [1] **, Babayev M.M.** [2]
[1] *National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan*
[2] *National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan*
shokiraka@mail.ru, babayevm@mail.ru

In this work an initial boundary value problem for partial differential equations with lagging argument in time is considered. Partial differential operators under the consideration consists of powers of the Laplace operator with spatial variables and non-local boundary conditions in Sobolev classes. The solution of the initial boundary value problem is constructed as series given by eigenfunctions of multidimensional spectral problem. It is shown that this system of eigenfunctions is complete and forms Riesz basis of subspaces of a Sobolev space. The existence of a regular solutions is proved in the subspaces of the Sobolev space.

Keywords: partial differential equations with lagging argument, fractional derivative in time, initial boundary value problem, spectral method, eigenvalues, eigenfunctions, completeness, Riesz basis, existence, uniqueness, series.

1. Постановка задачи

Как известно, что в физике твердого тела изучаются так называемые фрактальные среды, в частности, явления диффузия в них. В одной из моделей, диффузия в сильно пористой среде описывается уравнением типа уравнения теплопроводности, но с дробной производной по временной координате с запаздывающим аргументом. Многие задачи о колебаниях балок и пластин, которые имеют большое значение в строительной механике, приводят к дифференциальным уравнениям высокого порядка [1, с. 141-143], [2, с. 278-280], [3, гл.3].

Отметим также, что к уравнению колебаний балки приходят во многих задачах при расчёте устойчивости вращающихся валов и изучении вибрации кораблей [4-7].

В данной работе рассматривается дифференциальное уравнение с дробной производной вида

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t)+a^2(-\Delta)^{\nu}u(x,t)+b^2(-\Delta)^{\nu}u(x,t-\tau)=f(x,t), \tag{1}$$

где $(x,t)\in Q, l-1<\alpha\leq l$, с начальными функциями

$$\begin{cases} D_{0t}^{\alpha-j}u(x,t)\Big|_{t=+0}=\varphi_j(x), x=(x_1,...,x_N)\in\Pi, j=1,..,l-1,\\ D_{0t}^{\alpha-l}u(x,t)=\varphi_l(x,t), \quad (x,t)=(x_1,...,x_N,t)\in\Pi\times[-\tau,0]. \end{cases} \tag{2}$$

и краевыми условиями

$$\begin{cases} \alpha_j(-\Delta)^i u(x_1,...,x_N,t)|_{x_j=0}+\beta_j(-\Delta)^i u(x_1,...,x_N,t)|_{x_j=\pi}=0,\\ 1\leq j\leq p,\\ \beta_j\frac{\partial(-\Delta)^i u(x_1...,x_N,t)}{\partial x_j}|_{x_j=0}+\alpha_j\frac{\partial(-\Delta)^i u(x_1,...,x_N,t)}{\partial x_j}|_{x_j=\pi}=0,\\ 1\leq j\leq p,\\ (-\Delta)^i u(x_1,...,x_N,t)|_{x_j=0}=(-\Delta)^i u(x_1,...,x_N,t)|_{x_j=\pi},\\ p+1\leq j\leq q,\\ \qquad\frac{\partial(-\Delta)^i u(x_1,...,x_N,t)}{\partial x_j}|_{x_j=0}=\frac{\partial(-\Delta)^i u(x_1,...,x_N,t)}{\partial x_j}|_{x_j=\pi}=0,\\ \qquad p+1\leq j\leq q,\\ \qquad(-\Delta)^i u(x_1,...,x_N,t)|_{x_j=0}=0, \quad q+1\leq j\leq N,\\ \qquad(-\Delta)^i u(x_1,...,x_N,t)|_{x_j=\pi}=0, \quad q+1\leq j\leq N,\\ \qquad 1\leq p\leq q\leq N, \qquad i=0,1,\ldots,\nu-1, \end{cases} \tag{3}$$

где $a,b,\tau,T>0$ –постоянные, $(x,t)=(x_1,...,x_N,t)\in Q$, $Q=\Pi\times(0,T)$, $T>0$, $\Pi=(0,\pi)\times\ldots\times(0,\pi)$, $\alpha_i=\mathrm{const}$, $\beta_i=\mathrm{const}$, $\alpha_j\neq0$, $\beta_j\neq0$, $|\alpha_j|\neq|\beta_j|$ при $1\leq j\leq p$ и достаточно гладкие функции $f(x,t)$, $\varphi_k(x)$, $k=1,2,\ldots l-1$, $\varphi_l(x,t)$ при каждом $t>-\tau$ разлагаемые функции по собственным функциям систему собственных функций спектральной задачи:

$$(-\Delta)^{\nu}\Delta v(x)=\mu v(x), \tag{4}$$

$$\begin{cases} \alpha_j(-\Delta)^i v(x_1,...,x_N)|_{x_j=0} + \beta_j(-\Delta)^i v(x_1,,...,x_N)|_{x_j=\pi} = 0, \\ 1 \le j \le p, \\ \beta_j \frac{\partial(-\Delta)^i v(x_1,...,x_N)}{\partial x_j}|_{x_j=0} + \alpha_j \frac{\partial(-\Delta)^i v(x_1...,x_N)}{\partial x_j}|_{x_j=\pi} = 0,\ 1 \le j \le p, \\ (-\Delta)^i v(x_1,...,x_N)|_{x_j=0} = (-\Delta)^i v(x_1,...,x_N)|_{x_j=\pi},\ p+1 \le j \le q, \\ \frac{\partial(-\Delta)^i v(x_1,...,x_N)}{\partial x_j}|_{x_j=0} = \frac{\partial(-\Delta)^i v(x_1,...,x_N)}{\partial x_j}|_{x_j=\pi} = 0,\ p+1 \le j \le q, \\ (-\Delta)^i v(x_1,...,x_N)|_{x_j=0} = 0, \quad q+1 \le j \le N, \\ (-\Delta)^i v(x_1,...,x_N)|_{x_j=\pi} = 0, \quad q+1 \le j \le N, \\ 1 \le p \le q \le N, \quad i = 0,1,\dots,\nu-1. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь дробная производная порядка $\alpha > 0$ имеет вид

$$D^{\alpha}_{at}u(x,t) = \frac{sign^{l+1}(t-a)}{\Gamma(l-\alpha)} \frac{d^l}{dt^l} \int\limits_a^t \frac{u(x,\tau)\cdot d\tau}{|t-\tau|^{\alpha-l+1}}.$$

Введем пространство $W^s_2(0,l)$ с нормой

$$\|f\|^2_{W^s_2(0,l)} = \|f\|^2_{L_2(0,l)} + \|D^s f\|^2_{L_2(0,l)},$$

где s произвольное натуральное число, при этом $W^0_2(0,l) = L_2(0,l)$.

Скалярное произведение в пространстве $W_2^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\Pi)$, вводится так:

$$(f(x),g(x))_{W_2^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\Pi)} =$$

$$(f(x),g(x))_{L_2(\Pi)} + \sum_{j_1=1}^{N} \left(D^{s_{j_1}}_{x_{j_1}} f(x), D^{s_{j_1}}_{x_{j_1}} g(x)\right)_{L_2(\Pi)} +$$

$$+ \sum_{1\le j_1<j_2\le N} \left(D^{s_{j_1}}_{x_{j_1}} D^{s_{j_2}}_{x_{j_2}} f(x),\ D^{s_{j_1}}_{x_{j_1}} D^{s_{j_2}}_{x_{j_2}} g(x)\right)_{L_2(\Pi)} + \dots +$$

$$+ \sum_{1\le j_1<j_2<\ldots<j_N\le N} \left(D^{s_{j_1}}_{x_{j_1}} D^{s_{j_2}}_{x_{j_2}} ...D^{s_{j_N}}_{x_{j_N}} f(x), D^{s_{j_1}}_{x_{j_1}} D^{s_{j_2}}_{x_{j_2}} ...D^{s_{j_N}}_{x_{j_N}} g(x)\right)_{L_2(\Pi)}.$$

Соответственно норма в пространстве $W_2^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\Pi)$, вводится так:

$$\|f\|^2_{W_2^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\Pi)} = \|f\|^2_{L_2(\Pi)} + \sum_{j_1=1}^{N} \left\| D^{s_{j_1}}_{x_{j_1}} f(x)\right\|_{L_2(\Pi)} +$$

$$+ \sum_{1\le j_1<j_2\le N}^{N} \left\| D^{s_{j_1}}_{x_{j_1}} D^{s_{j_2}}_{x_{j_2}} f(x)\right\|_{L_2(\Pi)} + \dots$$

$$+ \sum_{1\le j_1<j_2<\dots<j_N\le N}^{N} \left\| D^{s_{j_1}}_{x_{j_1}} D^{s_{j_2}}_{x_{j_2}} \dots D^{s_{j_N}}_{x_{j_N}} f(x)\right\|_{L_2(\Pi)}.$$

2. Полнота системы собственных функций в подпространствах Соболева

Обозначим через

$$\overset{0}{V}\,{}_2^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\Pi)$$

множество всех функций $f(x) \in W_2^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\Pi)$, удовлетворяющих граничным условиям (5). Справедливо следующая

Теорема 1. Пусть $\alpha_j \ne 0,\ \beta_j \ne 0,\ |\alpha_j| \ne |\beta_j|$ действительные числа при каждом $1 \le j \le p$ и

$$\rho = \max_{1\le j\le p} \sqrt{{\theta_j}^2 + 2\left(\frac{\theta_j}{\sqrt{2}} + (\varphi_j+1)^{s_j} - 1\right)^2} \cdot \sigma(s_j) < 1,$$

где $\sigma(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sigma(s_j) = 1$, при $s_j > 0$, $\theta_j = \sqrt{2}\cdot \max\limits_{x\in[0,\pi]} \left|e^{i\varphi_j x} - 1\right|$, $\lambda_{m_j} = 2m_j + \varphi_j$, $\varphi_j = \frac{1}{\pi}\arccos\frac{-2\alpha_j\beta_j}{{\alpha_j}^2+{\beta_j}^2}$, $m_j \in \mathbb{Z}$. Тогда система собственных функций

$$\{v_{m_1\dots m_N}(x_1,\dots,x_N)\}_{(m_1,\dots,m_p)\in\mathbb{Z}^p,(m_{p+1},\dots,m_q)\in\mathbb{Z}^{q-p},(m_{q+1},\dots,m_N)\in\mathbb{N}^{N-q}} =$$

$$= \left\{ \prod_{j=1}^{p} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{sign({\beta_j}^2 - {\alpha_j}^2)\alpha_j \sin\lambda_{m_j}x_j + \beta_j\cos\lambda_{m_j}x_j}{\sqrt{{\alpha_j}^2+{\beta_j}^2}\sqrt{1+\left|\lambda_{m_j}\right|^{2s_j}}} \right\}_{(m_1,\dots,m_p)\in\mathbb{Z}^p} \times$$

$$\times \left\{ \prod_{j=p+1}^{q} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+|2m_j|^{2s_j}}} exp(i2m_jx_j) \right\}_{(m_{p+1},\dots,m_q)\in\mathbb{Z}^{q-p}} \times$$

$$\times\left\{\prod_{j=q+1}^{N}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+|m_j|^{2s_j}}}sin(m_jx_j)\right\}_{(m_{q+1},\dots,m_N)\in\mathbb{N}^{N-q}},$$

спектральной задачи (4)–(5) образует полной ортонормированный системой в классах Соболева $\overset{0}{V}{}_2^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\Pi)$.

Теорема 2. Пусть $\alpha_j\neq 0,\ \beta_j\neq 0,\ |\alpha_j|\neq|\beta_j|$ действительные числа при каждом $1\le j\le p$ и

$$\rho=\max_{1\le j\le p}\sqrt{\theta_j{}^2+2\left(\frac{\theta_j}{\sqrt{2}}+(\varphi_j+1)^{s_j}-1\right)^2}\cdot\sigma(s_j)<1,$$

где $\sigma(0)=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sigma(s_j)=1$, при $s_j>0$, $\theta_j=\sqrt{2}\cdot\max_{x\in[0,\pi]}\left|e^{i\varphi_jx}-1\right|,\ \lambda_{m_j}=2m_j+\varphi_j,\ \varphi_j=\frac{1}{\pi}\arccos\frac{-2\alpha_j\beta_j}{\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2},\ m_j\in\mathbb{Z}$, $s_j>k+\frac{N}{2},\ k\geqslant 0,\ k\in\mathbb{Z}$. Тогда ряд Фурье функции $f(x)\in\overset{0}{V}{}_2^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\Pi)$ по ортонормированных собственных функций

$$\{v_{m_1\dots m_N}(x_1,\dots,x_N)\}_{(m_1,\dots,m_p)\in\mathbb{Z}^p,(m_{p+1},\dots,m_q)\in\mathbb{Z}^{q-p},(m_{q+1},\dots,m_N)\in\mathbb{N}^{N-q}}=$$

$$=\left\{\prod_{j=1}^{p}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{sign(\beta_j{}^2-\alpha_j{}^2)\alpha_j\sin\lambda_{m_j}x_j+\beta_j\cos\lambda_{m_j}x_j}{\sqrt{\alpha_j{}^2+\beta_j{}^2}\sqrt{1+\left|\lambda_{m_j}\right|^{2s_j}}}\right\}_{(m_1,\dots,m_p)\in\mathbb{Z}^p}\times$$

$$\times\left\{\prod_{j=p+1}^{q}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+|2m_j|^{2s_j}}}exp(i2m_jx_j)\right\}_{(m_{p+1},\dots,m_q)\in\mathbb{Z}^{q-p}}\times$$

$$\times\left\{\prod_{j=q+1}^{N}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+|m_j|^{2s_j}}}sin(m_jx_j)\right\}_{(m_{q+1},\dots,m_N)\in\mathbb{N}^{N-q}},$$

спектральной задачи (4)–(5) сходится по норме пространства $C^k(\Pi)$ к функции $f(x)$.

Доказательство теоремы 1 и 2 можно найти в работе [8].

3. Существование и единственность решения начально-граничной задачи

Регулярным решением уравнения (1) в области $Q = \Pi \times (0, T)$, $T > 0$ назовем функцию $u(x,t)$ из класса $u(x,t) \in C(\overline{Q})$, $D_{0t}^{\alpha-i}u(x,t) \in C(\overline{Q})$, $i = 1, 2, ..., l-1$, $D_{0t}^{\alpha-l}u(x,t) \in C(\overline{\Pi} \times [-\tau, T])$, $D_{0t}^{\alpha}u(x,t) \in C(Q)$, и удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $(x,t) \in Q$.

Обозначим через $\overset{0}{V}{}_2^{s_1,s_2,...,s_N;\theta}(Q)$ множество всех функций $u(x,t) \in W_2^{s_1,s_2,...,s_N;\,\theta}(Q)$, удовлетворяющих граничным условиям (3). Функцию $u(x,t)$ назовем регулярным решением задача (1)–(3) в области $Q = \Pi \times (0,T)$, если функция $u(x,t)$ регулярная решения уравнения (1) в области Q и удовлетворяет начальным функциям и граничным условиям (2) и (3).

Пусть функция $u(x,t) \in W_2^{s_1,s_2,...,s_N;\,\theta}(Q)$ с показателем $s_1 = s_2 = ... = s_N = 2\nu + \frac{N}{2}$, $\theta = -[-\alpha]$ удовлетворяют уравнению (1) во всех точках $(x,t) \in Q$ и удовлетворяет начальным и граничным условиям (2) и (3). Тогда функция $u(x,t)$ является регулярным решением задача (1)–(3) в области $Q = \Pi \times (0,T)$.

Справедлива следующая

Теорема 3. Пусть начальные функций $\varphi_j(x)$, $j = 1, 2, ..., l$, и правую часть $f(x,t)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{m_1=-\infty}^{\infty} ... \sum_{m_q=-\infty}^{\infty} \sum_{m_{q+1}=1}^{+\infty} ... \sum_{m_N=1}^{+\infty} \left(\left| (\varphi_j)_{m_1,...,m_N} \right|^2 \prod_{k=1}^{N} (1 + \lambda_{m_k}^{2s_k}) \right) < \infty,$$

$$\sum_{m_1=-\infty}^{\infty} ... \sum_{m_q=-\infty}^{\infty} \sum_{m_{q+1}=1}^{+\infty} ... \sum_{m_N=1}^{+\infty} \left(\left| \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} \left| f_{m_1,...,m_N}(\xi) - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \mu_{m_1,...,m_N} b^2 (D_{0t}^{l-\alpha}\varphi_l)_{m_1,...,m_N}(\xi) \right| d\xi \right|^2 \times \prod_{k=1}^{N} (1 + \lambda_{m_k}^{2s_k}) \right) < \infty,$$

$$\sum_{m_1=-\infty}^{\infty} ... \sum_{m_q=-\infty}^{\infty} \sum_{m_{q+1}=1}^{+\infty} ... \sum_{m_N=1}^{+\infty} \left| {}_1T_{j,m_1,...,m_N} \right|^2 < +\infty,$$

$$\sum_{m_1=-\infty}^{\infty} ... \sum_{m_q=-\infty}^{\infty} \sum_{m_{q+1}=1}^{+\infty} ... \sum_{m_N=1}^{+\infty} \left(\left| \int_{\tau}^{t} (t-\xi)^{\alpha-1} \cdot \left| f_{m_1,...,m_N}(\xi) - \right.\right.\right.$$

$$-\mu_{m_1,\ldots,m_N} b^2 \cdot {}_1T_{m_1,\ldots,m_N}(\xi-\tau)\big|\, d\xi\Big|^2 \times \prod_{k=1}^{N}\left(1+\lambda_{m_k}^{2s_k}\right)\Bigg) < \infty,$$

. . . .

$$\sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{m_q=-\infty}^{\infty} \sum_{m_{q+1}=1}^{+\infty} \ldots \sum_{m_N=1}^{+\infty} \left|{}_nT_{j,m_1,\ldots,m_N}\right|^2 < +\infty,$$

$$\sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \ldots \sum_{m_q=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_{q+1}=1}^{+\infty} \ldots \sum_{m_N=1}^{+\infty} \Bigg(\Bigg|\int\limits_{n\tau}^{t} (t-\xi)^{\alpha-1} \times$$

$$\times \left| f_{m_1,\ldots,m_N}(\xi) - \mu_{m_1,\ldots,m_N} b^2 \cdot {}_nT_{m_1,\ldots,m_N}(\xi-n\tau)\right| d\xi\Big|^2 \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{N}\left(1+\lambda_{m_k}^{2s_k}\right)\Bigg) < \infty$$

для любого $j=1,\ldots,l$ и $n\tau \le t \le (n+1)\tau$, $n=0,\ldots,\left[\frac{T}{\tau}\right]$. Тогда регулярные решение задачи (1)–(3) из класса $\overset{0}{V}{}_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N;\,\theta}(Q)$ с показателем $s_1=s_2=\ldots=s_N=2\nu+\frac{N}{2}$, $\theta=-[-\alpha]$ существует, единственно и представляется в виде ряда

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\sum_{\substack{m_i=-\infty\\ i=1,\ldots,q}}^{+\infty} \sum_{\substack{m_i=1\\ i=q+1,\ldots N}}^{+\infty} \\ &\Bigg[\sum_{j=1}^{l} (\varphi_j)_{m_1,\ldots,m_N} \cdot t^{\alpha-j} E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(-\mu_{m_1\ldots m_N} a^2 \cdot t^{\alpha}\right) + \\ &+ \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha,\alpha}\left(-\mu_{m_1,\ldots,m_N} \cdot a^2 (t-\xi)^{\alpha}\right) \times \\ &\times \Big(f_{m_1,\ldots,m_N}(\xi) - \mu_{m_1,\ldots,m_N} b^2 \cdot (D_{0t}^{l-\alpha}\varphi_l)_{m_1,\ldots,m_N}(\xi)\Big)\, d\xi \times \\ &\times \tilde{v}_{m_1,\ldots,m_N}(x_1,\ldots,x_N)\Bigg] \end{aligned} \tag{6}$$

при $0 \le \tau \le t$. Аналогично, в отрезке $\tau \le t \le 2\tau$ единственное решение задачи (1)–(3) в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \ldots \sum_{m_q=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_{q+1}=1}^{+\infty} \ldots \sum_{m_N=1}^{+\infty}$$

$$\left[\sum_{j=1}^{l} {}_1T_{j,m_1,\ldots,m_N} \cdot (t-\tau)^{\alpha-j} E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(-\mu_{m_1,\ldots,m_N} a^2 \cdot (t-\tau)^{\alpha}\right) + \right.$$

$$+\int_{\tau}^{t} (t-\xi)^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha,\alpha}\left(-\mu_{m_1,\ldots,m_N} a^2 (t-\xi)^{\alpha}\right) [f_{m_1,\ldots,m_N}(\xi) -$$

$$\left. -\mu_{m_1,\ldots,m_N} b^2 \cdot {}_1T_{m_1,\ldots,m_N}(\xi-\tau)\right] d\xi \times \tilde{v}_{m_1,\ldots,m_N}(x_1,...,x_N)\Big], \qquad (7)$$

где коэффициенты определяется по формулам

$$\begin{gathered}
{}_1T_{m_1,\ldots,m_N}(t) = \\
\sum_{j=1}^{l} (\varphi_j)_{m_1,\ldots,m_N} \cdot t^{\alpha-j} E_{\alpha,\alpha-j+1}(-\mu_{m_1,\ldots,m_N} a^2 \cdot t^{\alpha}) + \\
+\int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha,\alpha}\left(-\mu_{m_1,\ldots,m_N} a^2 (t-\xi)^{\alpha}\right) \\
\left[f_{m_1,\ldots,m_N}(\xi) - \mu_{m_1,\ldots,m_N} b^2 (D_{0t}^{l-\alpha}\varphi_l)_{m_1,\ldots,m_N}(\xi)\right] d\xi.
\end{gathered} \qquad (8)$$

при $0 \le t \le \tau$ и

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{z^q}{\Gamma(\alpha q + \beta)}. \qquad (9)$$

Далее, в отрезке $n\tau \le t \le (n+1)\tau$ единственное решение задачи (1)–(3) в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{m_q=-\infty}^{\infty} \sum_{m_{q+1}=1}^{+\infty} \ldots \sum_{m_N=1}^{+\infty}$$

$$\left[\sum_{j=1}^{l} {}_nT_{j,m_1,\ldots,m_N} \cdot (t-n\tau)^{\alpha-j} E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(-\mu_{m_1,\ldots,m_N} a^2 \cdot (t-n\tau)^{\alpha}\right) + \right.$$

$$+\int_{n\tau}^{t} (t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-\mu_{m_1,\ldots,m_N} a^2 (t-\xi)^{\alpha}\right) [f_{m_1,\ldots,m_N}(\xi) - \qquad (10)$$

$$\left. -\mu_{m_1,\ldots,m_N} b^2 \times {}_nT_{m_1,\ldots,m_N}(\xi-n\tau)\right] d\xi \times \tilde{v}_{m_1,\ldots,m_N}(x_1,...,x_N)\Big],$$

где коэффициенты определяется по формулами

$$
\begin{aligned}
&{}_2T_{m_1,\ldots,m_N}(t) = \\
&= \sum_{j=1}^{l} {}_1T_{j,m_1,\ldots,m_N} \cdot (t-\tau)^{\alpha-j} E_{\alpha,\alpha-j+1}(-\mu_{m_1,\ldots,m_N} a^2 \cdot (t-\tau)^{\alpha}) + \\
&+ \int_{\tau}^{t} (t-\xi)^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha,\alpha}\left(-\mu_{m_1,\ldots,m_N} a^2 (t-\xi)^{\alpha}\right) \times \\
&\times \left[f_{m_1,\ldots,m_N}(\xi) - \mu_{m_1,\ldots,m_N} b^2 \cdot {}_1T_{m_1,\ldots,m_N}(\xi-\tau)\right] d\xi
\end{aligned}
\tag{11}
$$

при $\tau \leq t \leq 2\tau$. Далее, в отрезка $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$

$$
\begin{aligned}
&{}_{(n+1)}T_{m_1,\ldots,m_N}(t) = \sum_{j=1}^{l} {}_nT_{j,m_1,\ldots,m_N} \cdot (t-n\tau)^{\alpha-j} \\
&E_{\alpha,\alpha-j+1} \times \left(-\mu_{m_1,\ldots,m_N} a^2 \cdot (t-n\tau)^{\alpha}\right) + \\
&+ \int_{n\tau}^{t} (t-\xi)^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha,\alpha}\left(-\mu_{m_1,\ldots,m_N} a^2 (t-\xi)^{\alpha}\right) \times \\
&\times \left[f_{m_1,\ldots,m_N}(\xi) - \mu_{m_1,\ldots,m_N} b^2 \cdot {}_nT_{m_1,\ldots,m_N}(\xi-n\tau)\right] d\xi
\end{aligned}
$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. 3-е изд. М.: Наука, 1977. 736 с.

2. *Рэлей Л.* Теория звука. М.: Государственное издательство технико–теоретической литературы, 2-е изд. Т.1. 1955. 504 с.

3. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.

4. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.

5. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.

6. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 200 с.

7. *Igor Podlubny.* Fractional Differential Equations. Mathematics in science and engineering. Volume 198. 1999. P.340.

8. *Kasimov Sh.G., Ataev Sh.K.* On solvability of the mixed problem for a partial equation of a fractional order with Laplace operators and nonlocal boundary conditions in the Sobolev classes // Uzbek Mathematical Journal. Tashkent. "FAN". 2018. № 1. P. 73 - 89.

УДК 517.95

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ МНОГОМЕРНОЙ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В КЛАССАХ СОБОЛЕВА

Касимов Ш.Г., Мадрахимов У.С., Кощанов А.П.
Национальный университет Узбекистана, г. Ташкент, Узбекистан;
shokiraka@mail.ru, umadraximov@mail.ru, allanazarkoshanov@mail.ru

В данной работе изучена многомерная начально-граничной задача для уравнения высокого порядка в классах Соболева. Решение начально-граничной задачи построено в виде суммы ряда по системе собственных функций многомерной спектральной задачи. У спектральной задачи найдены собственные значения и построена соответствующая система собственных функций. Показано, что эта система собственных функций является полной и образует базис Рисса в пространстве Соболева. На основании полноты системы собственных функций доказана теорема единственности решения задачи. В классах Соболева доказано существование регулярного решения поставленной начально-граничной задачи.

Ключевые слова: уравнение балки, начально-граничная задача, спектральный метод, собственные значения, собственные функции, полнота, базис Рисса, единственность, существование, ряд.

ON THE UNIQUE SOLVABILITY OF A MULTI-DIMENSIONAL INITIAL-BOUNDARY PROBLEM FOR A HIGH-ORDER EQUATION IN THE SOBOLEV CLASSES

Kasimov Sh.G., Madraximov U.S., Koshanov A.P.
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
shokiraka@mail.ru, umadraximov@mail.ru, allanazarkoshanov@mail.ru

In this paper, we study a problem with initial conditions for a more general equation of beam oscillations, one end of which is patched, and the other floating, in the multidimensional case. The solution of the initial boundary-value problem is constructed in as the sum of a series in the system of eigenfunctions of a multidimensional spectral problem. The spectral problem found eigenvalues and the corresponding system of eigenfunctions is constructed. It is shown that this system eigenfunctions is complete and forms a Riesz basis in Sobolev space. Based on completeness system of eigenfunctions, the uniqueness theorem for solving the problem is proved. In Sobolev classes the existence of a regular solution to the stated initial-boundary value problem is proved.

Key words: beam equation, initial-boundary value problem, spectral method, eigenvalues, eigenfunctions, completeness, Riesz basis, uniqueness, existence, series.

1. Постановка задачи

Многие задачи о колебаниях стержней, балок и пластин, которые имеют большое значение в строительной механике, приводят к дифференциальным уравнениям более высокого порядка [1] с. 141-143, [2] с. 278-280, [3] гл.3, [4] с.45, [5] с.35, [6] гл.4. Отметим также, что к уравнению колебаний балки приходят во многих задачах при расчёте устойчивости вращающихся валов и изучении вибрации кораблей [7] гл.2.

В данной работе рассматривается более общее уравнение вида

$$D_{0t}^{\alpha}u(y,t)+a^2\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^{4m}u(y,t)}{\partial y_j^{4m}}=f(y,t),\ (y,t)\in\Pi\times(0,T),\ p-1<\alpha\le p, \tag{1}$$

$N,m,p\in\mathbb{N}, N\ge 2,$ с начальными и краевыми условиями

$$D_{0t}^{\alpha-i}u(y,t)\big|_{t=0}=\varphi_i(y),\quad i=1,2,...,p, \tag{2}$$

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial^{4k}u(y,t)}{\partial y_j^{4k}}\right|_{y_j=0}=0,\quad \left.\frac{\partial^{4k+1}u(y,t)}{\partial y_j^{4k+1}}\right|_{y_j=0}=0,\\ \left.\frac{\partial^{4k+1}u(y,t)}{\partial y_j^{4k+1}}\right|_{y_j=l}=0,\quad \left.\frac{\partial^{4k+3}u(y,t)}{\partial y_j^{4k+3}}\right|_{y_j=l}=0,\ k=\overline{0,\ m-1},\ \ j=\overline{1,N}, \end{cases} \tag{3}$$

где $(y,t) = (y_1, ..., y_j, ..., y_N, t) \in \Pi \times (0,T)$, $\Pi = (0,l) \times ... \times (0,l)$, $l, T > 0$ – заданные положительные числа и $f(y,t)$, $\varphi_i(y)$, $i = 1, 2, ..., p$ – достаточно гладкие функции разлагаемые по собственным функциям $\{v_n(y), n \in \mathbb{N}^N\}$ спектральной задачи:

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^{4m} v\,(y)}{\partial y_j^{4m}} - \lambda v\,(y) = 0, \tag{4}$$

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial^{4k} v(y)}{\partial y_j^{4k}}\right|_{y_j=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial^{4k+1} v(y)}{\partial y_j^{4k+1}}\right|_{y_j=0} = 0, \\ \left.\frac{\partial^{4k+1} v(y)}{\partial y_j^{4k+1}}\right|_{y_j=l} = 0, \quad \left.\frac{\partial^{4k+3} v(y)}{\partial y_j^{4k+3}}\right|_{y_j=l} = 0, \quad k = \overline{0,\, m-1}, \ \ j = \overline{1, N}, \end{cases} \tag{5}$$

λ – спектральный параметр. Здесь при $p-1 < \alpha \le p, p \in \mathbb{N}$, дробная производная определяется по формуле

$$D_{at}^{\alpha} u(y,t) = \frac{\operatorname{s}ign^{p+1}(t-a)}{\Gamma(l-\alpha)} \frac{d^p}{dt^p} \int_a^t \frac{u(y,\tau) \cdot d\tau}{|t-\tau|^{\alpha-p+1}}.$$

Отметим, что в указанных выше работах методом разделения переменных найдены собственные частоты (собственные значения) для простейшего уравнения балки, но вопросы обоснования корректности начально-граничных задач не изучены. В работах [8]-[10] для уравнения балки, т.е. для уравнения (1) при $\alpha = 2$, $m = 1$, $N = 1$ изучены начально-граничные задачи. Следует отметим, что аналогичные начально-граничные задачи было исследовано работах [11],[12]. В данной работе на основании работ [8], [20]-[24] получена теорема единственности и существования решения задачи (1)-(5) в пространстве Соболева. Решение построено в виде суммы ряда по системе собственных функций многомерной спектральной задачи (6) и (3).

2. Полнота системы собственных функций в классах Соболева

Будем искать собственные функции задачи (6), (3) в виде произведения $v(y) = \prod_{i=1}^{N} X_i(y_i)$. Тогда для определения каждого $X_i(y_i)$, $i = \overline{1, N}$, мы получаем одномерную спектральную задачу вида:

$$X^{(4m)}(x)-\lambda X(x)=0,\ 0<x<l, \tag{6}$$

$$X^{(4k)}(0)=X^{(4k+1)}(0)=X^{(4k+1)}(l)=X^{(4k+3)}(l)=0,\ \ k=\overline{0,\, m-1}. \tag{7}$$

Здесь для простоты $X_i(y_i)$ обозначены через $X(x)$.
Введем пространство $W_2^s(0,l)$ с нормой

$$\|f\|^2_{W_2^s(0,l)}=\|f\|^2_{L_2(0,l)}+\|D^s f\|^2_{L_2(0,l)}\,,$$

где s произвольное натуральное число, при этом $W_2^0(0,l)=L_2(0,l)$. Обозначим через L дифференциальный оператор, порожденный дифференциальным выражением $l(X)=X^{(4m)}(x)$ на пространстве $W_2^{4m}(0,l)$, функций $X(x)$, удовлетворяющих граничным условиям (4). Такое пространство обозначим через $\overset{\circ}{W}{}_2^{4m}(0,l)$.

Справедлива следующая

Лемма 1. Оператор $LX=X^{(4m)}(x)$ с областью определения

$$D(L)=\Big\{X\,(x):\ X\,(x)\in W_2^{4m}(0,l)\cap C^{4m-1}[0,l]\,,$$
$$X^{(4k)}(0)=X^{(4k+1)}(0)=X^{(4k+1)}(l)=X^{(4k+3)}(l)=0,\, k=\overline{0,\, m-1}\Big\}\,,$$

является положительным и симметрическим оператором в пространстве $L_2(0,l)$.

Пусть $\lambda=d^{4m},\, d>0$. Тогда для (6) характеристическое уравнение имеет вид: $\mu^{4m}-d^{4m}=0$. Корни этого уравнения определяются по формуле $\mu_j=de^{i\frac{j\pi}{2m}},\, j=\overline{0,\, 4m-1}$. Для оператора L справедливо следующее равенство:

$$L-d^{4m}I=\frac{d^{4m}}{dx^{4m}}-d^{4m}I=\prod_{j=0}^{4m-1}\left(\frac{d}{dx}-\mu_j I\right)=\prod_{j=0}^{2m-1}\left(\frac{d^2}{dx^2}-\mu_j^2 I\right)=$$

$$=\prod_{j=0}^{m-1}\left(\frac{d^4}{dx^4}-\mu_j^4 I\right)=\left(\frac{d^4}{dx^4}-d^4 I\right)\prod_{j=1}^{m-1}\left(\frac{d^4}{dx^4}-\mu_j^4 I\right). \tag{8}$$

Здесь $\mu_j^4=d^4\cdot e^{i\frac{2j\pi}{m}},\, j=1,\ \ldots,\, m-1,$ не являются положительными числами. Из равенства (8) следует, что оператор $LX=X^{(4m)}\,(x)$ с областью определения $D(L)$ имеет собственную функцию $X = X(x)$ в том и только том случае, когда функция $X(x)$ является нетривиальным решением задачи следующего вида:

$$X^{(4)}(x) = d^4 X(x), \, 0 < x < l, \tag{9}$$

$$X(0) = X'(0) = X'(l) = X'''(l) = 0. \tag{10}$$

Действительно, пусть $X^{(4m)}(x) = d^{4m} X(x)$, $X(x) \in D(L)$ и $X(x) \neq 0$ не является решением задачи (9), (10). Тогда

$$\prod_{j=1}^{m-1} \left(\frac{d^4}{dx^4} - \mu_j^4 I \right) \left(\frac{d^4}{dx^4} - d^4 I \right) X = 0, \; X(x) \in D(L), \quad X(x) \neq 0.$$

Так как спектральная задача(9), (10) имеет только положительные собственные числа, то имеем

$$\left(\frac{d^4}{dx^4} - d^4 I \right) X \equiv 0, \;\; X(x) \in D(L), \quad X(x) \neq 0.$$

Это противоречие доказывает наше утверждение. Итак, оператор $LX = X^{(4m)}(x)$ с областью определения $D(L)$ имеет собственную функцию $X(x)$ только в том случае, когда функция $X(x)$ является нетривиальным решением задачи (9), (10). Следовательно, исследование спектральной задачи (6), (4) приводит к изучению спектральной задачи (9), (10). Теперь найдем собственные значения и соответствующие собственные функции спектральной задачи (9), (10). Общие решение уравнения (9) определим в следующем виде:

$$X(x) = Achdx + Bshdx + C \cos dx + D \sin dx, \tag{11}$$

где A, B, C, D – произвольные постоянные. Удовлетворяя функцию (11) первыми двумя условиями из (10), находим $C = -A$, $D = -B$. Тогда функция (11) примет вид

$$X(x) = A(chdx - \cos dx) + B(shdx - \sin dx). \tag{12}$$

Удовлетворяя функцию (12) последними двумя граничными условиями из (10), получим

$$\begin{cases} A\,(shdl + \sin dl) + B\,(chdl - \cos dl) = 0, \\ A\,(shdl - \sin dl) + B\,(chdl + \cos dl) = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Приравнивая определитель этой системы нулю, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} shdl + \sin dl & chdl - \cos dl \\ shdl - \sin dl & chdl + \cos dl \end{vmatrix} = 2\left(shdl \cos dl + chdl \sin dl\right) = 0,$$

получаем трансцендентное уравнение

$$tgld = -thld \tag{14}$$

для вычисления собственных значений. Из графиков функций $tgld$ и $-thld$ видно, что в каждом из интервалов $\frac{\pi n}{l} < d_n < \frac{\pi n}{l} + \frac{3\pi}{4l}$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ имеется ровно один корень d_n, причем $\frac{\pi n}{l} + \frac{3\pi}{4l} - d_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда видно, что существуют счетного множество корней (собственных значений) уравнения (14):

$$d_0 < d_1 < \cdots < d_n < \cdots,$$

при этом справедлива при больших асимптотическая формула

$$d_n = \frac{\pi n}{l} + \frac{3\pi}{4l} + O\left(e^{-2\pi n}\right). \tag{15}$$

Из системы (13) с учетом уравнения (14) выразим A через B и подставим в (12). В результате найдем соответствующую систему собственных функций

$$\overline{X}_n(x) = \frac{\cos d_n(l-x)}{\sin d_n l} + \frac{chd_n(l-x)}{shd_n}, \;\; n \in \overline{\mathbb{Z}}_+ \tag{16}$$

Тогда собственные значения задачи (6, (4) определяются по формуле $\lambda_n = d_n^{4m}$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ где d_n – корень уравнения (14), а собственные функции по формуле (16).

Пусть

$$X_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1+d_n^{4s}}} \frac{1}{\sqrt{l} \cdot |ctgd_n l|} \left(\frac{\cos d_n(l-x)}{\sin d_n l} + \frac{chd_n(l-x)}{shd_n l}\right), n \in \bar{\mathbb{Z}}_+. \tag{17}$$

соответствующая система собственных функций задачи (6), (4).

Справедлива следующая

Лемма 2. Собственные функции $X_n(x)$ оператора L, соответствующие различным собственным значениям $\lambda_n = d_n^{4m}, n = 0, 1, 2, \ldots$ ортонормальны в классе $W_2^{2s}(0,l)$, $s = 1, 2, \ldots$.

Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}_2^{2s}(0,l)$ множество всех функций $f(x) \in W_2^{2s}(0,l)$, удовлетворяющих граничным условиям $f^{(4k)}(0) = f^{(4k+1)}(0) = f^{(4k+1)}(l) = \ldots = f^{(4k+3)}(l) = 0$ при $k = 0, 1, ..., \left[\frac{s+1}{2}\right] - 1$.

Справедлива следующая

Теорема 1. Система собственных функций (15) спектральной задачи (6) и (4) является полной ортонормированной системой в классе Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^{2s}(0,l)$.

Обозначим через $\overset{\circ}{H}{}^s(0,l)$ множество всех функций $f(x) \in H^s(0,l)$, удовлетворяющих граничным условиям $f^{(4k)}(0) = f^{(4k+1)}(0) = f^{(4k+1)}(l) = \ldots = f^{(4k+3)}(l) = 0$ при $k = 0, 1, ..., \left[\frac{s+3}{4}\right] - 1$.

Теорема 2. Система собственных функций (17) спектральной задачи (6), (4) образует базис Рисса в пространстве Соболева $\overset{\circ}{H}{}^s(0,l)$.

Норма в пространстве $W_2^{s_1, s_2, \ldots, s_N}(\Pi)$ определяется по формуле

$$\|f(x)\|^2_{W_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi)} = \|f(x)\|^2_{L_2(\Pi)} + \sum_{j_1=1}^{N} \left\|D^{s_{j_1}}_{x_{j_1}} f(x)\right\|^2_{L_2(\Pi)} +$$

$$+ \sum_{1 \le j_1 < j_2 \le N} \left\|D^{s_{j_1}}_{x_{j_1}} D^{s_{j_2}}_{x_{j_2}} f(x)\right\|^2_{L_2(\Pi)} +$$

$$+ \ldots + \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_N \le N} \left\|D^{s_{j_1}}_{x_{j_1}} D^{s_{j_2}}_{x_{j_2}} \ldots D^{s_{j_N}}_{x_{j_N}} f(x)\right\|^2_{L_2(\Pi)}.$$

Лемма 3. Если $\{\varphi_{m_1}(x_1)\}, \ldots, \{\varphi_{m_N}(x_N)\}$ – полные ортонормальные системы соответственно в пространствах $W_2^{2s_1}(0,l), \ldots, W_2^{2s_N}(0,l)$, то система всех произведений

$$\varphi_m(x) = \varphi_{m_1 \ldots m_N}(x_1, ..., x_N) = \varphi_{m_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot \varphi_{m_N}(x_N)$$

есть полная ортонормальная система в $W_2^{2s_1, 2s_2, \ldots, 2s_N}(\Pi)$.

Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}_2^{2s_1,2s_2,\ldots,2s_N}(\Pi)$ множество всех функций $f(x) \in W_2^{2s_1,2s_2,\ldots,2s_N}(\Pi)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$\left.\frac{\partial^{4k_j} f(x)}{\partial x_j^{4k_j}}\right|_{x_j=0} = 0, \ \left.\frac{\partial^{4k_j+1} f(x)}{\partial x_j^{4k_j+1}}\right|_{x_j=0} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial^{4k_j+1} f(x)}{\partial x_j^{4k_j+1}}\right|_{x_j=l} = 0, \ \left.\frac{\partial^{4k_j+3} f(x)}{\partial x_j^{4k_j+3}}\right|_{x_j=l} = 0$$

при $k_j = \overline{0, \left[\frac{s_j+1}{2}\right] - 1}$, $j = \overline{1, N}$. Применим эту лемму 3 к нашим ортонормальным системам. В пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^{2s_1, 2s_2, \ldots, 2s_N}(\Pi)$ функций $N-$ переменных $f(x) = f(x_1, ..., x_N)$ полную ортонормальную систему образуют из всех произведений

$$v_{m_1 \ldots m_N}(x_1, ..., x_N) = X_{m_1}(x_1) \cdot ... \cdot X_{m_N}(x_N),$$

где

$$X_{m_j}(x_j) = \frac{1}{\sqrt{1 + d_{m_j}^{4s_j}}} \frac{1}{\sqrt{l} \cdot \left|ctgd_{m_j} l\right|} \left(\frac{\cos d_{m_j}(l - x_j)}{\sin d_{m_j} l} + \frac{chd_{m_j}(l - x_j)}{shd_{m_j} l} \right),$$
$$m_j \in \bar{\mathbb{Z}}_+, \tag{18}$$

d_{m_j} – корень уравнения (14). Таким образом, справедлива следующая

Теорема 3. Система собственных функций

$$\{v_{m_1 \ldots m_N}(x_1, ..., x_N)\}_{(m_1, \ldots, m_N) \in \bar{\mathbb{Z}}_+^N} = \left\{ \prod_{j=1}^{N} X_{m_j}(x_j) \right\}_{(m_1, \ldots, m_N) \in \bar{\mathbb{Z}}_+^N} \tag{19}$$

спектральной задачи (6), (3) является полной ортонормированный системой в классе Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^{2s_1, 2s_2, \ldots, 2s_N}(\Pi)$.

Обозначим через $\overset{\circ}{H}{}^{s_1, s_2, \ldots, s_N}(\Pi)$ множество всех функций $f(x) \in H^{s_1, s_2, \ldots, s_N}(\Pi)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$\left. \frac{\partial^{4k_j} f(x)}{\partial x_j^{4k_j}} \right|_{x_j=0} = 0, \ \left. \frac{\partial^{4k_j+1} f(x)}{\partial x_j^{4k_j+1}} \right|_{x_j=0} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial^{4k_j+1} f(x)}{\partial x_j^{4k_j+1}} \right|_{x_j=l} = 0, \ \left. \frac{\partial^{4k_j+3} f(x)}{\partial x_j^{4k_j+3}} \right|_{x_j=l} = 0$$

при $k_j = \overline{0, \left[\frac{s_j+3}{4}\right] - 1}$, $j = \overline{1, N}$

Справедлива следующая

Теорема 4. Система собственных функций (18) спектральной задачи (6), (3) образует базис Рисса в пространстве Соболева $\overset{\circ}{H}{}^{s_1,s_2,...,s_N}(\Pi)$.

3. Существование и единственность решения начально-граничной задачи

Регулярным решением уравнения (1) в области $Q=\Pi\times(0,T)$ назовем функцию $u(y,t)$ из класса $u(y,t)\in C(Q)$, $D_{0t}^{\alpha}u(y,t)\in C(Q)$, $\frac{\partial^{4m}u(y,t)}{\partial y_j^{4m}}\in C(Q)$, $j=1,2,...,N$ и удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $(y,t)\in Q$.

Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,...,s_N;\theta}(Q)$ множество всех функций $u(y,t)\in W_2^{s_1,s_2,...,s_N;\theta}(Q)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$\left.\frac{\partial^{4k_j}u(y,t)}{\partial y_j^{4k_j}}\right|_{y_j=0}=0,\quad \left.\frac{\partial^{4k_j+1}u(y,t)}{\partial y_j^{4k_j+1}}\right|_{y_j=0}=0,$$

$$\left.\frac{\partial^{4k_j+1}u(y,t)}{\partial y_j^{4k_j+1}}\right|_{y_j=l}=0,\quad \left.\frac{\partial^{4k_j+3}u(y,t)}{\partial y_j^{4k_j+3}}\right|_{y_j=l}=0$$

при $k_j=\overline{0,\left[\frac{s_j+3}{4}\right]-1}$, $j=\overline{1,N}$.

Функцию $u(y,t)$ назовем регулярным решением задачи (1)-(5) в области $Q=\Pi\times(0,T)$, если функция $u(y,t)$ регулярное решение уравнения (1) в области $Q=\Pi\times(0,T)$ из класса $D_{0t}^{\alpha-k}u(y,t)\in C(\overline{Q})$, $1\le k\le p$, $\frac{\partial^{4m-3}u(y,t)}{\partial y_j^{4m-3}}\in C(\overline{Q})$, $j=1,2,...,N$ и удовлетворяет начальным и граничным условиям (2) и (5).

Пусть функция $u(y,t)\in W_2^{s_1,s_2,...,s_N,\theta}(Q)$ с показателем $s_1=s_2=...=s_N=4m+\frac{N}{2}$, $\theta=-[-\alpha]$ удовлетворяет уравнению (1) во всех точках $(y,t)\in Q$ и удовлетворяет начальным и граничным условиям (2) и (5). Тогда функция $u(y,t)$ является регулярным решением задачи (1)-(5) в области $Q=\Pi\times(0,T)$.

Теорема 5. Пусть начальные функций $\varphi_i(y), i=1,2,...,p,$ и правую часть $f(y,t)$ удовлетворяют условию

$$\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_N=0}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{p}\varphi_{j,(m_1\ldots m_N)}t^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(\mu_{m_1\ldots m_N}t^{\alpha}\right)+\right.$$

$$\left.+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\mu_{m_1\ldots m_N}(t-\tau)^{\alpha}\right]f_{m_1\ldots m_N}(\tau)\,d\tau\right|^2\cdot$$

$$\cdot\prod_{k=1}^{N}\left(1+d_{m_k}^{2s_k}\right)<\infty. \qquad (20)$$

при каждом $t>0$. Тогда регулярные решение задачи (1) - (5) из класса $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N;\theta}(Q)$ с показателем $s_1=s_2=\ldots=s_N=4m+\frac{N}{2}$, $\theta=-[-\alpha]$ существует, единственно и представляется в виде ряда

$$u(y,t)=\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_N=0}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{p}\varphi_{j,(m_1\ldots m_N)}t^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(\mu_{m_1\ldots m_N}t^{\alpha}\right)+\right.$$

$$\left.+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\mu_{m_1\ldots m_N}(t-\tau)^{\alpha}\right]f_{m_1\ldots m_N}(\tau)\,d\tau\right]\cdot$$

$$\cdot\widetilde{v}_{m_1\ldots m_N}(y_1,\ldots,y_N). \qquad (21)$$

где коэффициенты определяются по формулам

$$\mu_{m_1\ldots m_N}=-\lambda_{m_1\ldots m_N}=-a^2\sum_{j=1}^{N}\lambda_{m_j}=-a^2\sum_{j=1}^{N}d_{m_j}^{4m}, \qquad (22)$$

$$E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(\mu_{m_1\ldots m_N}\cdot t^{\alpha}\right)=\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\left(\mu_{m_1\ldots m_N}t^{\alpha}\right)^q}{\Gamma(\alpha q+\alpha-j+1)}, \qquad (23)$$

$$E_{\alpha,\alpha}\left(\mu_{m_1\ldots m_N}\cdot(t-\tau)^{\alpha}\right)=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\left(\mu_{m_1\ldots m_N}\right)^{q-1}(t-\tau)^{\alpha(q-1)}}{\Gamma(\alpha q)}, \qquad (24)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.

2. *Рэлей Л.* Теория звука. 2-е изд. Т.1. М.: 1955. 504 с.

3. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х.,Уивер У.* Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.

4. *Коренев Б.Г.* Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. М.: Наука, 1965. 355 с.

5. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения с техническими приложениями. М.: Наука, 1968. 504 с.

6. *Гулд С.* Вариационные методы в задачах о собственных значениях: Введение в метод промежуточных задач Вайнштейна. М.: Мир, 1970. 328

7. *Крылов А.Н.* Вибирация судов. М.: Наука, 2012. 216 с.

8. *Сабитов К.Б.* Колебания балки с заделанными концами.// Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19. N2, 311 - 324.

9. *Сабитов К.Б.* К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок. //Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. N 1, С.89-100.

10. *Сабитов К.Б.* Начальная задача для уравнения колебаний балки. //Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. N 5, С.665-671.

11. *Amanov D., Ashyralyev A.* Initial-boundary value problem for fractional partial differential equation of higher order // Abstract and Applied Analysis. Hindawi Publishing Corporation. Vol. 2012, Article ID 973102, 16 pages. p.1-16.

12. *Аманов Д.* Разрешимость краевых задач для уравнений высокого порядка с дробной производной // Докл. АН РУз. 2010. №2. С. 3-5.

13. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.

14. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск. Наука и техника, 1987. 688 с.

15. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применения. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

16. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 200 с.

17. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. 3-е изд. М.: Наука, 1980. 688 с.

18. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965. 448 с.

19. *Igor Podlubny* . Fractional Differential Equations. Mathematics in science and engineering. Volume 198. 1999. p.340.

20. *Касимов Ш.Г., Атаев Ш.К., Мадрахимов У.С.* О разрешимости смешанной задачи для уравнения с частными производными дробного порядка с операторами Штурма-Лиувилля с нелокальными краевыми условиями. // Узбекский математический журнал. 2016. N2,С.158-169.

21. *Касимов Ш.Г., Атаев Ш.К.* О разрешимости смешанной задачи для уравнения с частными производными дробного порядка с операторами Лапласа с нелокальными краевыми условиями в классах Соболева. // Узбекский математический журнал. 2018. N1,С.1-16.

22. *Касимов Ш.Г., Мадрахимов У.С.* Начально-граничная задача для уравнения балки в многомерном случае. Дифференциальные уравнения. 2019. том 55. №10, с. 1379-1391

23. *Kasimov Sh.G., Madrakhimov U.S.* On the unique solvability for initial-boundary problems of vibrations of a beam, one end of which is fixed and the other is free, in the Sobolev classes in the multidimensional case. Uzbek mathematical jurnal. 2019. No 4, 92-106 pp.

24. *Сабитов К.Б., Касимов Ш.Г.,Мадрахимов У.С.* Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высокого порядка в многомерном случае.// Вестник РГГУ. Серия "Информатика. Информационная безопасность. Математика". 2020. №1. с.75-101.

УДК 517.544, 517.538.7, 517.984.54

ДИСКРЕТНАЯ ЗАДАЧА РИМАНА И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Новокшенов В.Ю.
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН г. Уфа, Россия;
novik53@mail.ru

Рассмотрены две задачи комплексного анализа, разрабатывавшиеся в Уфе в 1970-х годах. Это задача Римана о скачке кусочно-аналитической функции на контуре и задача интерполяции целой функции на счетном множестве точек в комплексной плоскости. Прослежено развитие этих задач в последующие годы и показано, что они имеют много общего.

Ключевые слова: Задача Римана, обратная задача рассеяния, целые функции, интерполяция, каноническое произведение, разностные уравнения Пенлеве, детерминант Фредгольма, асимптотические разложения.

DISCRETE RIEMANN-HILBERT PROBLEM AND INTERPOLATION OF ENTIRE FUNCTIONS

Novokshenov V.Yu.
Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Center, Ufa, Russia;
novik53@mail.ru

We consider two problems in complex analysis which were developed in Ufa at 1970s years. Those are a Riemann-Hilbert problem about jump of piecewise-analytic function on a contour and a problem of interpolation of entire functions a countable set in the complex plane. A progress in recent years led to comprehension that they have much common in subject.

Key words: Riemann-Hilbert problem, inverse scattering problem, entire functions, interpolation, canonical product, discrete Painlev?e equations, Fredholm determinant, asymptotic expansions

Рассмотрены две задачи комплексного анализа, разрабатывавшиеся в Уфе в 1970-х годах. Это задача Римана о скачке кусочно-аналитической функции на контуре и задача интерполяции целой функции на счетном множестве точек в комплексной плоскости. Прослежено развитие этих задач в последующие годы и показано, что они имеют много общего. Первая из них служит эквивалентом обратной задачи рассеяния, применяемой для интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений математической физики. Вторая задача является естественным обобщением формулы Лагранжа для нахождения полинома, принимающего заданные значения на конечном множестве точек. Показано, что обе задачи могут быть объединены обобщением задачи Римана на случай “дискретного контура на котором происходит “скачок"аналитической функции. В такой формулировке рассмотрена дискретная матричная задача Римана, применяемая ныне во многих задачах для точно решаемых разностных уравнений и оценки спектра случайных матриц. В статье показано, как дискретная матричная задача Римана доставляет способ интегрирования нелинейных разностных уравнений математической физики, таких как разностные уравнения Пенлеве. С другой стороны продемонстрировано, как задание вычетов мероморфной матрицы-функции на счетном множестве в $\mathbb{C}$ с точкой накопления в бесконечности по сути сводится к задаче интерполяции целых функций. Указано другое приложение решений этой задачи, связанное с вычислением детерминантов Фредгольма, применяемых в комбинаторике и теории представления групп.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новокшенов В.Ю.* Дискретная задача Римана и интерполяция целых функций // Уфимский математический журнал. 2021. Том 11. № 2. С. 56–67.

УДК 517.95

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ СУММИРУМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ В-ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Пирматов Ш.Т.
Ташкентский государственный технический университет,г. Ташкент, Узбекистан;
shams9.04@mail.ru

В работе изучается необходимые условия разложимости спектральных разложений по собственным функциям оператора Бесселя в произвольной N -мерной области. Если среднее Рисса порядка s в некоторой точке имеет предел, то среднее значение порядка $\alpha > s-(N+k-3)/2$ функции тоже сходится к этому пределу.

Ключевые слова: В-полигармонический оператор, спектральное разложения, собственная функция,спектр, средняя значения.

NECESSARY CONDITIONS FOR THE SUMMABILITY OF SPECTRAL EXPANSIONS IN EIGENFUNCTIONS OF A B-POLYHARMONIC OPERATOR

Pirmatov Sh.T.
Tashkent State Technical University, Tashkent, Uzbekistan;
shams9.04@mail.ru

In this paper, we study the necessary conditions for the expansion of spectral expansions in terms of the eigenfunction of the Bessel operator in an arbitrary N -dimensional domain. If the average value of the order s at some point has a limit, then the average value of the order $\alpha > s-(N+k-3)/2$ of the function also converges to this limit.

Key words: B-polyharmonic operator, spectral decomposition, eigenfunction, spectrum, mean value.

Рассмотрим евклидово полупространство R_N^+ точек (x', y), где $x' = (x_1, x_2, ..., x_{N-1})$, $y = x_N$ и $y > 0$. Пусть ограниченная область Ω^+ с гладкой границей Γ расположена в полупространстве R_N^+ и прилегает к гиперплоскости $y = 0$. Часть границы Γ, расположенную в R_N^+, обозначим Γ^+, а часть границы Γ, лежащую на гиперплоскости $y = 0$, обозначим через Γ^0. В области Ω^+ рассмотрим дифференциальный оператор вида

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{k}{y}\frac{\partial}{\partial y},$$

где $k-$ фиксированное положительное число. Обозначим через $u(x', y)$ четное по y, классическое решение в области Ω^+ уравнение

$$\Delta_B^m u - (-1)^m \lambda u = 0,$$

где $m-$ любое натуральное число, $\lambda > 0$. Оператор Δ_B^m будем именовать $B-$ полигармоническим.

$u_n(x', y)-$ полная ортонормированная система собственных функций рассматриваемого оператора Бесселя, отвечающих собственным значениям λ_n:

$$\Delta_B^m u_n - (-1)^m \lambda_n u_n = 0.$$

В области Ω функции $f \in L_2, k(\Omega)$ по собственным функция $u_n(x', y)$ разложим в ряд Фурье $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k u_k(x)$, где f_k- коэффициенты Фурье.

Спектральное разложение произвольной функции $f \in L_2(\Omega)$ имеет вид

$$E_\lambda f(x) = \sum_{\lambda_n < \lambda} f_n u_n(x),$$

а среднее Рисса порядка s определяется равенством

$$E_\lambda^s f(x) = \sum_{\lambda_k < \lambda} \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^s f_k u_k(x) \; = \; \int\limits_0^\lambda \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s dE_t f(x).$$

Теорема. Предположим, что для некоторого s в точке $\mathrm{x}_0 \in \Omega$ спектральное разложение функции $f \in L_2, k(\Omega)$ суммируется средним Рисса порядка s. Тогда для любого $\alpha > s - (N + k - 3)/2$ справедливо следующее утверждение

$$\lim_{R \to 0} S_R^\alpha f(x) = S.$$

$S_R^\alpha f(x)-$ среднее значение порядка $\alpha \geq 0$ функции $f(x)$ в данной точке x .

Доказательство теоремы опирается на формулу среднего значения, полученного Н.И. Киприяновой в работе (см.[2]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Titchmarsh E.C.* Eigenfunction Expansions Associated with Second Order Differential Equations. Part II. Oxford, 1958.

2. *Киприянова Н.И.* Формула среднего значения для собственных функций сингулярного дифференциального оператора второго порядка // Дифференциальное уравнения. 1985. Т. 21. № 11. С. 1998–2001.

УДК 517.95

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ, ПОРОЖДЕННЫХ СИСТЕМОЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Шкаликов А.А.

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия;
ashkaliko@yandex.ru

Рассматриваются операторы, порожденные дифференциальными выражениями вида

$$l(y) = B(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y, \quad y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}, \quad x \in [a,b]$$

и граничные условия

$$U_0 y(a) + U_1 y(b) = 0.$$

Здесь U_0 *и* U_1 *– матрицы* $n \times n$, $B = diag\{b_1(x), b_2(x), ..., b_n(x)\}$, *и предполагается, что* b_j^{-1} *элементы матрицы-функции* Q $n \times n$ *суммируемы. Здесь модифицируется понятие регулярности (оно зародилось в работах Г. Бирхо, Дж. Тамаркина и Р. Лангера) и доказывается, что собственные и присоединенные функции регулярного оператора образуют безусловный базис в* $L_2(a,b)$. *Также будут обсуждаться некоторые другие свойства регулярных операторов.*

Ключевые слова: система линейных дифференциальных уравнений первого порядка, однородные граничные условия, система корневых функций, безусловный базис.

SPECTRAL PROPERTIES OF ORDINARY DIFFERENTIAL OPERATORS GENERATED BY A FIRST ORDER SYSTEM

Shkalikov A.A.
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;
ashkaliko@yandex.ru

We consider operators generated by differential expressions of the form

$$l(y) = B(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y, \quad y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}, \quad x \in [a, b]$$

and boundary conditions

$$U_0 y(a) + U_1 y(b) = 0.$$

Here U_0 *and* U_1 *are* $n \times n$ *matrices,* $B = diag\{b_1(x), b_2(x), ..., b_n(x)\}$ *, and it is assumed that* b_j^{-1} *and the entries of the* $n \times n$ *matrix-function* Q *are summable. We modify the the concept of regularity (it was originated in the works of G.Birkhoff, J.Tamarkin, and R.Langer) and prove that the eigen and associated functions of a regular operator form an unconditional basis in* $L_2(a, b)$ *. Some other properties of regular operators will also be discussed.*

Key words: system of linear differential equations of the first order, homogeneous boundary conditions, system of root functions, unconditional basis.

Секция 2. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

УДК 517.52

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ БАЗИСОВ ИЗ ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ ЭКСПОНЕНТ В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА

Асадзаде Д.А.
Отдел негармонического анализа, Институт Математики и Механики НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан;
cavadesedzade02@gmail.com

В этой статье рассматривается возмущенная экспоненциальная система $\left\{e^{i\lambda_n t}\right\}_{n\in\mathrm{Z}}$ *(где* $\{\lambda_n\}$ *-некоторая последовательность действительных чисел) в пространстве Орлича* $L_{\mathrm{M}}(-\pi;\pi)$ *. Мы находим условие на последовательность* $\{\lambda_n\}$ *, которого достаточно для того, чтобы указанная выше система образовавала базис для* $L_M(-\pi;\pi)$ *. Устанавливается аналог классической теоремы Левинсона о замене конечного числа элементов этой системы другими элементами. Наш результат является аналогом соответствующих результатов, полученных для пространств Лебега* $L_p, 1\le p\le+\infty$ *. Мы также устанавливаем аналог классической теоремы Левинсона о полноте указанной выше системы в пространствах* $L_p, 1\le p\le+\infty$ *.*

Ключевые слова: пространство Орлича, теорема Левинсона, базисность.

ON STABILITY OF BASES FROM PERTURBED EXPONENTIAL SYSTEMS IN ORLICZ SPACES

Asadzadeh Javad
Department of Nonharmonic Analysis, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan;
cavadesedzade02@gmail.com

In this article, perturbed exponential system $\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_\mathrm{n}\mathrm{t}}\right\}_{\mathrm{n}\in\mathrm{Z}}$ *(where* $\{\lambda_\mathrm{n}\}$ *is some sequence of real numbers) is considered in the Orlicz space*

$L_M(-\pi;\pi)$. *We find a condition on the sequence* $\{\lambda_n\}$, *which is sufficient for the above system to form a basis for* $L_M(-\pi;\pi)$. *We establish an analogue of classical Levinson theorem on the replacement of a finite number of elements of this system by other elements. Our result are the analogues of the corresponding results obtained for Lebesgue spaces* $L_p, 1 \le p \le +\infty$. *We also establish an analogues of classical Levinson theorem on the completeness of above system in the spaces* $L_p, 1 \le p \le +\infty$.
Key words: Orlicz space, Levinson theorem, basicity.

Предположим, что N-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию. Пусть $M(\cdot)$, $M^*(\cdot)$ - N-функции, дополняющие друг друга, а числа α_M и β_M - верхний и нижний индексы Бойда для пространства Орлича L_M . Пусть $\{\lambda_n\}_{n\in Z}$;$\{\mu_n\}_{n\in Z}\subset R$ - некоторые последовательности, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $\mu_i \neq \mu_j$ для $i \neq j$. Пусть

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |\lambda_n - \mu_n|^{\gamma} < +\infty$$

где $\gamma = \min\left(\frac{1}{\beta_M};\frac{1}{\beta_{M^*}}\right)$, $\alpha_M + \beta_{M^*} \equiv 1, \alpha_{M^*} + \beta_M \equiv 1$.

Если система $\left\{e^{i\lambda_n x}\right\}_{n\in Z}$ образует базис для $L_M(-\pi;\pi)$, эквивалентный базису $\left\{e^{inx}\right\}_{n\in Z}$, то система $\left\{e^{i\mu_n x}\right\}_{n\in Z}$ также образует базис для $L_M(-\pi;\pi)$, что эквивалентно $\left\{e^{inx}\right\}_{n\in Z}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пэли Р., Винер Н.* Преобразования Фурье в комплексной области. Амер. Математика. Soc. Коллок. Publ., 19 (Amer. Math. Soc., RI, 1934).

2. *Левин Б.Ю.* Распределение корней целых функций. М.: ГИТЛ, 1956.

3. *Кадец М.И.* О точном значении постоянной Пэли-Винера // ДАН СССР. 1964.

4. *Билалов Б.Т.* Некоторые проблемы аппроксимации. Баку: Элм, 2016. 380 с. (на русском)

5. *Билалов Б.Т.* Базисность некоторых экспоненциальных, синусоидальных и косинусных систем // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 1. С. 10–16.

УДК 517.98

ЧАСТИЧНО ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В СОБОЛЕВСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Барышева И.В., Фролова Е.В.
Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского, г. Липек, Россия
barysheva_iv@mail.ru, lsnn48@mail.ru

В соболевском пространстве функций $H^1(D)$, где D — конечный прямоугольник евклидова пространства $\mathbb{R}_2$, рассматриваются частично интегральные операторы, вводятся условия на ядра этих операторов и функции, при которых соответствующие операторы ограничены в $H^1(D)$

Ключевые слова: частично интегральные операторы, пространства Соболева, ограниченный оператор.

PARTIAL INTEGRAL OPERATORS IN SOBOLEV SPACE

Barysheva I.V., Frolova E.V.
Lipetsk State Pedagogical University named after P.P. Semenov-Tyan-Shanskiy, Lipetsk, Russia;
barysheva_iv@mail.ru, lsnn48@mail.ru

In the Sobolev space of functions $H^1(D)$, where D is a finite rectangle of the Euclidean space $\mathbb{R}_2$, partially integral operators are considered, conditions are introduced on the kernels of these operators and functions under which the corresponding operators are bounded in $H^1(D)$

Key words: partial integral operator, Sobolev space, bounded operator.

Решение различных прикладных задач сводится к исследованию интегральных уравнений с частными интегралами. Такие уравнения и соответствующие им операторы исследовались, например, в [1–4].

В данной работе рассматривается оператор $K = K_1 + K_2 + K_3$, где

$$K_1 : \quad (K_1 u)(x) = \int_{a_1}^{b_1} k_1(x, t_1) u(t_1, x_2)\, dt_1,$$

$$K_2: \quad (K_2u)(x) = \int_{a_2}^{b_2} k_2(x,t_2)u(x_1,t_2)\,dt_2,$$

$$K_3: \quad (K_3u)(x) = \int_D k_3(x,t)u(t)\,dt,$$

$t=(t_1,t_2)$, функция $u(x)$ $(x=(x_1,x_2))$ определена на конечном прямоугольнике $D=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\in\mathbb{R}_2$, а интегралы понимаются в смысле Лебега.

Через $W_p^l(D)$ обозначается пространство Соболева, состоящее из функций $u(x)\in L^p(D)$, имеющих обобщённые производные заданного порядка l из $L^p(D)$. При $1\le p\le\infty$ пространства $W_p^l(D)$ являются банаховыми пространствами, а при $p=2$ — гильбертовыми пространствами и обозначаются $H^l(D)=W_2^l(D)$. Норма в пространстве $W_p^l(D)$ порядка l вводится по следующей формуле:

$$\|u\|_{W_p^l(D)} = \left(\sum_{|\alpha|\le l}\int_D |D^\alpha u|^p dx\right)^{1/p}.$$

Заметим, что в слагаемом K_1 функция $u(x)$ интегрируется только по первой переменной, а в K_2 — только по второй. Таким образом, K_1 и K_2 — операторы с частными интегралами, а K_3 — интегральный оператор.

Введём обозначения: $D'=D\times[a_1,b_1]$, $D''=D\times[a_2,b_2]$, $\Delta_i=|b_i-a_i|^{\frac{1}{2}}, i=1,2.$

Теорема. Пусть ядра $k_1\in W_4^1(D')$, $k_2\in W_4^1(D")$, $k_3\in H^1(D\times D)$, а функция $u(x)\in W_4^1(D)$. Тогда выполняются неравенства:

$$||(K_1u)||_{H^1(D)}\le C_1\cdot\|u\|_{W_4^1(D)}, \quad ||(K_2u)||_{H^1(D)}\le C_2\cdot\|u\|_{W_4^1(D)},$$

$$||(K_3u)||_{H^1(D)}\le C_3\cdot\|u\|_{H^1(D)},$$

гле постоянные $C_1,\ C_2,\ C_3$ определяются равенствами:

$$C_1=\Delta_1\left\{3\left[\int_{D'}k_1^4(x,t_1)dxdt_1\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\int_{D'}k_{1,x_1}^4(x,t_1)dxdt_1\right]^{\frac{1}{2}}+\right.$$

$$\left.+2\left[\int_{D'}k_{1,x_2}^4(x,t_1)dxdt_1\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$C_2 = \Delta_2 \left\{ 3 \left[\int_{D''} k_2^4(x,t_2) dx dt_2 \right]^{\frac{1}{2}} + 2 \left[\int_{D''} k_{2,x_1}^4(x,t_1) dx dt_2 \right]^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \left[\int_{D''} k_{2,x_2}^4(x,t_2) dx dt_2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$C_3 = \left\{ \int_D \int_D \Big(k_3^2(x,t) + k_{3,x_1}^2(x,t) + k_{3,x_2}^2(x,t) \Big) dt dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Проведём доказательство неравенства для оператора K_1. Для опepатра K_2 доказательство неравенства проводится по аналогичной схеме. Для интегрального оператора K_3, в котором функция u не зависит от x, доказательство очевидно.

$$||(K_1 u)||_{H^1(D)} = \left|\left| \int_{a_1}^{b_1} k_1(x,t_1) u(t_1,x_2)\, dt_1 \right|\right|_{H^1(D)} \le$$

$$\le \left\{ \int_D \left(\int_{a_1}^{b_1} k_1(x,t_1) u(t_1,x_2)\, dt_1 \right)^2 dx + \right.$$

$$+ \int_D \left(\int_{a_1}^{b_1} k_{1,x_1}(x,t_1) u(t_1,x_2)\, dt_1 \right)^2 dx +$$

$$+2 \int_D \left(\int_{a_1}^{b_1} k_{1,x_2}(x,t_1) u(t_1,x_2) dt_1 \right)^2 dx +$$

$$\left. +2 \int_D \left(\int_{a_1}^{b_1} k_1(x,t_1) u_{x_2}(t_1,x_2) dt_1 \right)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

К внутренним интегралам по t_1 применим неравенство Гёльдера:

$$||(K_1 u)||_{H^1(D)} \le \left\{ \int_D \left(\int_{a_1}^{b_1} k_1^2(x,t_1) dt_1 \cdot \int_{a_1}^{b_1} u^2(t_1,x_2)\, dt_1 \right) dx + \right.$$

$$+ \int_D \left(\int_{a_1}^{b_1} k_{1,x_1}^2(x,t_1) dt_1 \cdot \int_{a_1}^{b_1} u^2(t_1,x_2)\, dt_1 \right) dx +$$

$$+2\int_D\left(\int_{a_1}^{b_1}k_{1,x_2}^2(x,t_1)dt_1\cdot\int_{a_1}^{b_1}u^2(t_1,x_2)dt_1\right)dx+$$

$$+\,2\int_D\left(\int_{a_1}^{b_1}k_1^2(x,t_1)dt_1\cdot\int_{a_1}^{b_1}u_{x_2}^2(t_1,x_2)dt_1\right)dx\Bigg\}^{\frac{1}{2}}.$$

Поскольку функция $u(t_1,x_2)$ здесь не зависит от переменной x_1, вынесем её за знак интеграла по этой переменной. Получим:

$$||(K_1u)||_{H^1(D)}\leq\Bigg\{\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1}u^2(t_1,x_2)dt_1\cdot\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_1}^{b_1}k_1^2(x,t_1)dt_1dx_1\right)dx_2+$$

$$+\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1}u^2(t_1,x_2)\,dt_1\cdot\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_1}^{b_1}k_{1,x_1}^2(x,t_1)dt_1dx_1\right)dx_2+$$

$$+2\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1}u^2(t_1,x_2)dt_1\cdot\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_1}^{b_1}k_{1,x_2}^2(x,t_1)dt_1dx_1\right)dx_2+$$

$$+\,2\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1}u_{x_2}^2(t_1,x_2)dt_1\cdot\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_1}^{b_1}k_1^2(x,t_1)dt_1dx_1\right)dx_2\Bigg\}^{\frac{1}{2}}$$

Теперь применим неравенство Гёльдера к внешнему интегралу по переменной x_2:

$$||(K_1u)||_{H^1(D)}\leq$$

$$\leq\left\{\left[\int\limits_{a_2}^{b_2}\left(\int\limits_{a_1}^{b_1}u^2(t_1,x_2)\,dt_1\right)^2dx_2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int\limits_{a_2}^{b_2}\left(\int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_1}^{b_1}k_1^2(x,t_1)dt_1dx_1\right)^2dx_2\right]^{\frac{1}{2}}+\right.$$

$$+\left[\int\limits_{a_2}^{b_2}\left(\int\limits_{a_1}^{b_1}u^2(t_1,x_2)dt_1\right)^2dx_2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int\limits_{a_2}^{b_2}\left(\int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_1}^{b_1}k_{1,x_1}^2(x,t_1)dt_1dx_1\right)^2dx_2\right]^{\frac{1}{2}}+$$

$$+2\left[\int\limits_{a_2}^{b_2}\left(\int\limits_{a_1}^{b_1}u^2(t_1,x_2)dt_1\right)^2dx_2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int\limits_{a_2}^{b_2}\left(\int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_1}^{b_1}k_{1,x_2}^2(x,t_1)dt_1dx_1\right)^2dx_2\right]^{\frac{1}{2}}+$$

$$+2\left[\int\limits_{a_2}^{b_2}\left(\int\limits_{a_1}^{b_1}u_{x_2}^2(t_1,x_2)dt_1\right)^2dx_2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int\limits_{a_2}^{b_2}\left(\int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_1}^{b_1}k_1^2(x,t_1)dt_1dx_1\right)^2dx_2\right]^{\frac{1}{2}}\Bigg\}^{\frac{1}{2}}.$$

По свойству интеграла Лебега получим:

$$||(K_1u)||_{H^1(D)}\leq$$

$$\leq\Delta_1\Bigg\{\left[\int\limits_{a_2}^{b_2}\int\limits_{a_1}^{b_1}u^4(t_1,x_2)\,dt_1dx_2\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\int\limits_{a_2}^{b_2}\int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_1}^{b_1}k_1^4(x,t_1)dt_1dx_1dx_2\right]^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\left[\int\limits_{a_2}^{b_2}\int\limits_{a_1}^{b_1}u^4(t_1,x_2)\,dt_1dx_2\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\int\limits_{a_2}^{b_2}\int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_1}^{b_1}k_{1,x_1}^4(x,t_1)dt_1dx_1dx_2\right]^{\frac{1}{2}}+$$

$$+2\left[\int\limits_{a_2}^{b_2}\int\limits_{a_1}^{b_1}u^4(t_1,x_2)\,dt_1dx_2\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\int\limits_{a_2}^{b_2}\int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_1}^{b_1}k_{1,x_2}^4(x,t_1)dt_1dx_1dx_2\right]^{\frac{1}{2}}+$$

$$+2\left[\int\limits_{a_2}^{b_2}\int\limits_{a_1}^{b_1}u_{x_2}^4(t_1,x_2)\,dt_1dx_2\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\int\limits_{a_2}^{b_2}\int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_1}^{b_1}k_1^4(x,t_1)dt_1dx_1dx_2\right]^{\frac{1}{2}}\Bigg\}^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq C_1\cdot\|u\|_{W_4^1(D)}.$$

Авторы выражают благодарность профессору Ляхову Л.Н. за постановку задачи и помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P.* Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. – New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. 560 p.

2. *Калитвин А.С., Фролова Е.В.* Линейные уравнения с частными интегралами. C-теория / ЛГПУ. Липецк, 2004. 195 с.

3. *Барышева И.В.* Об обратимости уравнений с частными интегралами в пространстве частично дифференцируемых функций //

Научные ведомости БелГУ. Физика. Математика. 2011. № 17(112). Вып. 24. С. 46–59.

4. *Барышева И.В., Калитвин А.С.* Об уравнениях Вольтерра с частными интегралами в пространстве частично дифференцируемых функций с операторами частного интегрирования// Научные ведомости БелГУ. Физика. Математика. 2012. № 11(130). Вып. 27. С. 15–23.

УДК 517.956.22

О РАЗРЕШИМОСТИ В МАЛОМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Билалов Б.Т. [1] **, Садыгова С.Р.** [1,2]

[1] *Институт Математики и Механики НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан;*

[2] *Университет Хазар, г. Баку, Азербайджан;*

b_bilalov@mail.ru, s_sadigova@mail.ru

В работе рассматривается эллиптическое уравнение высокого порядка с негладкими коэффициентами относительно симметричных пространств на области $\Omega \subset R^n$. Выделяются сепарабельные подпространства этих пространств, в которых бесконечно дифференцируемые и финитные функции плотны. Определяются соболевы пространства, порожденные этими подпространствами. При определенных условиях на коэффициенты уравнения и индексы Бойда симметричного пространства доказывается разрешимость в малом рассматриваемого уравнения в симметричных соболевых пространствах. Полученный результат усиливает ранее известного классического L_p -аналога. Симметричные пространства охватывают пространства Лебега, типа Морри, гранд-Лебега, Орлича, Лоренца и многие другие пространства. В конце приводим некоторые результаты, касающихся этих частных случаев. Приводим также результат относительно слабого (weak)- L_p^w пространства.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, разрешимость в малом, симметричные пространства, индексы Бойда.

ON SOLVABILITY IN THE SMALL OF HIGHER ORDER ELLIPTIC EQUATIONS IN REARRANGEMENT INVARIANT SPACES

Bilalov B.T. [1] **, Sadigova S.R.** [1,2]
[1] *Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan;*
[2] *Khazar University, Baku, Azerbaijan;*
b_bilalov@mail.ru, s_sadigova@mail.ru

A higher order elliptic equation with nonsmooth coefficients with respect to rearrangement invariant spaces on the domain $\Omega \subset R^n$ is considered in this work. Separable subspaces of these spaces are distinguished, in which infinitely differentiable and compactly supported functions are dense. Sobolev spaces generated by these subspaces are determined. Under certain conditions on the coefficients of the equation and the Boyd indices of a rearrangement invariant space, the solvability in the small of the considered equation in rearrangement invariant Sobolev spaces is proved. This result strengthens the previously known classical L_p -analog. Rearrangement invariant spaces include Lebesgue spaces, Morrey type spaces, Grand-Lebesgue, Orlicz, Lorentz and many other spaces. At the end, we present some results concerning these particular cases. We also present a result with respect to weak- L_p^w space.

Key words: elliptic equation, solvability in the small, rearrangement invariant spaces, Boyd indices.

Проблемы разрешимости дифференциальных уравнений в частных производных в том или ином смысле (классическое решение, слабое решение, сильное решение, решение в малом и т.п.) являются главной целью теории дифференциальных уравнений и этому направлению посвящены замечательные монографии известных математиков. До сих пор интерес к этому направлению не ослабевает и в связи с различными причинами очень возрастает. Следует отметить, что в последнее время в связи с конкретными задачами механики, математической физики и чистой математики интерес к так называемым нестандартным пространствам сильно возрос. К таким пространствам относятся пространства Лебега с переменным показателем суммируемости, пространства типа Морри, пространства гранд-Лебега, пространства Орлича и др. . Вопросы гармонического анализа и теории аппроксимации в этих пространствах достаточно хорошо изучены и они освещены в монографиях [1-7]. Полученные в этом направлении результаты позволяют изучать вопросы, продиктованные теорией дифференциальных уравнений относительно этих пространств. Подобные исследования проведены в работах [8-17] и др.. Особенностями изучения вопросов разрешимости дифференциальных уравнений в вышеприведенных пространствах заключается в том, что в основном эти пространства не являются сепарабельными и естественно бесконечно-дифференцируемые и финитные функции не плотны в них. По этой причине постановки для дифференциальных уравнений относительно этих пространств различаются: несепарабельная постановка и сепарабельная постановка. В несепарабельном случае данные рассмотренной задачи принадлежат несепарабельным пространствам и решение также ищется в соответствующем несепарабельном пространстве. В этом случае постановка задачи отличается от традиционных, напр., от L_p-постановки и многие известные методы исследования (напр., понятие следа и связанные с ним факты, теоремы о компактных вложениях и т.п.) не применимы. Следует отметить, что с точки зрения приложений этот случай не представляет интерес, так как к решению невозможно применить приближенные методы типа Галеркина, Ритца и др., и вообще решение невозможно численно реализовать. В сепарабельном случае определяются сепарабельные подпространства, данные надлежащей задачи и решение принадлежать этим подпространствам. В этом случае классическая схема исследования применима и следует установить аналогов многих классических результатов в рассмотренных подпространствах. Подобные исследования проведены в работах [4;16;17;20]. Отметим, что рассмотренные в этих работах (касательно дифференциальных уравнений) пространства являются несепарабельными симметричными (rearrangement-invariant) банаховыми функциональными пространствами. Естественно возникает вопрос о том, что нельзя ли объединить все эти исследования в одном едином облике. Этот вопрос имеет положительный ответ и настоящая работа посвящена этому направлению. Следует отметить, что результаты работы [18;19] непосредственно имеют отношения к рассматриваемым вопросам данной работы.

В работе рассматривается эллиптическое уравнение высокого порядка с негладкими коэффициентами относительно симметричных пространств на области $\Omega \subset R^n$. Выделяются сепарабельные подпространства этих пространств, в которых бесконечно дифференци-

руемые и финитные функции плотны. Определяются соболевы пространства, порожденные этими подпространствами. При определенных условиях на коэффициенты уравнения и индексы Бойда симметричного пространства доказывается разрешимость в малом рассматриваемого уравнения в симметричных соболевых пространствах. Полученный результат усиливает ранее известного классического L_p -аналога. Симметричные пространства охватывают пространства Лебега, типа Морри, гранд-Лебега, Орлича, Лоренца и многие другие пространства. В конце приводим некоторые результаты, касающихся этих частных случаев. Приводим также результат относительно слабого (weak)- L_p^w пространства.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Развития Науки при Президенте Азербайджанской Республики-Грант No EIF-BGM-4-RFTF1/2017- 21/02/1-M-19 и Советом по Научным и Технологическим Исследованиям Турции (TUBITAK) при Национальной Академии Наук Азербайджана (НАНА).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Adams D.R.* Morrey spaces. Switzherland, Springer, 2016.

2. *Cruz-Uribe D.V., Fiorenza A.* Variable Lebesgue spaces. Birkhauser, Springer, 2013.

3. *Kokilashvili V., Meskhi A., Rafeiro H., Samko S.* Integral Operators in Non-Standard Function Spaces. Volume 1: Variable Exponent Lebesgue and Amalgam Spaces, Springer, 2016.

4. *Kokilashvili V., Meskhi A., Rafeiro H., Samko S.* Integral Operators in Non-Standard Function Spaces. Volume 2: Variable Exponent Hölder, Morrey–Campanato and Grand Spaces, Springer (2016)

5. *Reo M.M., Ren Z.D.* Applications of Orlichz Spaces, New-York-Basel, 2002. 465p.

6. *Castillo R.E., Rafeiro H.* An introductory course in Lebesgue spaces, Springer. 2016.

7. *Harjulehto P., Hasto P.* Orlicz spaces and generalized Orlicz spaces, Springer. 2019, 169 p.

8. *Byun S.S., Palagachev D.K., Softova L.G.* Survey on gradient estimates for nonlinear elliptic equations in various function spaces// St. Petersbg. Math. J. 2020, v. 31, No. 3. pp. 401-419 and Algebra Anal. 2019. v. 31, No. 3. pp. 10-35.

9. *Palagachev D.K., Softova L.G.* Singular integral operators, Morrey spaces and fine regularity of solutions to PDE's// Potential Anal. 2004. v. 20. pp. 237-263.

10. *Chen Y.* Regularity of the solution to the Dirichlet problem in Morrey space// J. Partial Differ. Eqs. 2002. v. 15. pp. 37-46.

11. *Di Fazio G.* On Dirichlet problem in Morrey spaces// Differential and Integral Equations. 1993. v. 6, No 2. pp. 383-391.

12. *Softova L.G.* The Dirichlet problem for elliptic equations with VMO coefficients in generalized Morrey spaces// Operator Theory. 2013, v. 229, pp. 365-380.

13. *Palagachev D.K., Ragusa M.A., Softova L.G.* Regular obligue derivative problem in Morrey spaces// Elec. Jour. of Diff. Eq. 2000. v. 2000, No 39. 1-17.

14. *Caso L., D'Ambrosio R., Softova L.* Generalized Morrey Spaces over Unbounded Domains// Azerb. J. Math. 2020. v. 10, No 1. pp. 193-208.

15. *Di Fazio G., Palagachev D.K., Ragusa M.A.* Global Morrey regularity of strong solutions to the Dirichlet problem for elliptic equations with discontinuous coefficients// J. Funct. Anal. 1999. v. 166, No. 2. pp. 179–196.

16. *Bilalov B.T., Sadigova S.R.* On solvability in the small of higher order elliptic equations in grand-Sobolev spaces// Complex Variables and Elliptic Equations, DOI: 10.1080/17476933.2020.1807965

17. *Bilalov B.T., Sadigova S.R.* Interior Schauder-type estimates for higher-order elliptic operators in grand-Sobolev spaces// Sahand Communications in Mathematical Analysis. 2021. v. 18, No. 2. pp. 129-148.

18. *Zhikov V.V.* On variational problems and nonlinear elliptic equations with nonstandard growth conditions// Journ. Math. Sci. 2011. v. 173, No 5. pp. 463–570.

19. *Bright I., Li Q., Torres M.* Occupational measures averaged shape optimization// ESAIM Control, Optimization and Calculus of Variations. 2018. v. 24, No 3. pp. 1141-1165.

20. *Bilalov B.T., Sadigova S.R.* On the fredholmness of the Dirichlet problem for a second-order elliptic equation in grand-Sobolev spaces// Ricerche mat. 2021. https://doi.org/10.1007/s11587-021-00599-9

УДК 517.98

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

Иноземцев А.И.
Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского, г. Липецк, Россия;
inozemcev.a.i@gmail.com

Рассмотрена первая альтернатива Фредгольма для частно-интегрального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром в анизотропном пространстве. Получены условия единственности решения частно-интегрального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром в $L_{(p_1,p_2)}((a_1,b_1)\times(a_2,b_2))$.

Ключевые слова: частный интеграл, частно-интегральное уравнение, анизотропное пространство Лебега, единственность, вырожденное ядро.

ON THE UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE FREDHOLM PARTIAR INTEGRAL EQUATION WITH A DEGENERATE KERNEL IN ANISOTROPIC LEBESQUE SPACES

Inozemtsev A.I.
Lipetsk State Pedagogical University named after P.P. Semenov-Tyan-Shanskiy , Lipetsk, Russia;
inozemcev.a.i@gmail.com

The first Fredholm alternative for the Fredholm partial integral equation with a degenerate kernel in an anisotropic space is considered. Conditions for the uniqueness of the solution of the Fredholm partial integral equation with a degenerate kernel are obtained in $L_{(p_1,p_2)}((a_1,b_1)\times(a_2,b_2))$.

Key words: partial integral, partial integral equation, anisotropic Lebesgue space, uniqueness, degenerate kernel.

Рассмотрим неоднородное частно-интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\varphi(x_1,x_2)=\lambda(K_1\varphi)(x_1,x_2)+f(x_1,x_2), \qquad (1)$$

где

$$(K_1\varphi)(x)=\int_{a_1}^{b_1}k_1(x_1,x_2;t_1)\varphi(t_1,x_2)\,dt_1$$

в анизотропных пространствах Лебега $L_{\mathbf{p}}(D)=L_{(p_1,p_2)}(D_{1,2})=L_{p_2}\left(D_2;L_{p_1}(D_1)\right)$, $D_{1,2}=(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)$. Анизотропное пространство Лебега $L_{\mathbf{p}}(D)$ определяется нормой

$$\|u\|_{L_{\mathbf{p}}(D)}=\left(\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1}|u(t_1,t_2)|^{p_1}\,dt_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}}dt_2\right)^{\frac{1}{p_2}}.$$

В работе [1] методом последовательных приближений с использованием неравенства

$$\|K_1^m f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)}\le\prod_{i=1}^{m}\|k_1\|_{L_{p_2^i q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))}\cdot\|f\|_{L_{p_2^{m+1}}(D_2;L_{p_1}(D_1))} \qquad (2)$$

показано существование решения уравнения (1). В работе [2], следуя монографии [3], показана единственность полученного решения, которое можно представить в виде

$$\varphi(x_1,x_2)=f(x_1,x_2)+\lambda\int_{D_1}r_1(x_1,x_2;t_1;\lambda)\,f(t_1,x_2)\,dt_1,$$

где при $|\lambda|\,C_1S_1<1$ резольвента $r_1(x_1,x_2;t_1;\lambda)$ ограничена в анизотропном пространстве $L_\infty\left(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1})\right)$ и имеет вид

$$r_1(x_1,x_2;t_1;\lambda)=\sum_{j=0}^{\infty}k_1^{(j+1)}(x_1,x_2;t_1)\lambda^j.$$

Рассмотрим уравнение (1) с вырожденным ядром

$$k_1(x_1,x_2;t_1)=\sum_{i=1}^{N}\tilde{k}_{1i}(x_1,x_2)a_i(t_1). \qquad (3)$$

Из (2) при $m \to \infty$ следует $k_1(x_1, x_2; t_1) \in L_\infty(D_2; L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))$, тогда $k_{1i}(x_1, x_2) \in L_\infty(D_2; L_{p_1}(D_1)), a_i(t_1) \in L_{q_1}(D_1)$. Уравнение (1) запишем в виде

$$\varphi(x_1, x_2) = \lambda \sum_{i=1}^{N} \tilde{k}_{1i}(x_1, x_2) \int_{a_1}^{b_1} a_i(t_1)\varphi(t_1, x_2)\, dt_1 + f(x_1, x_2). \qquad (7)$$

Обозначим

$$u_i(x_2) = \int_{a_1}^{b_1} a_i(t_1)\varphi(t_1, x_2)\, dt_1, \qquad (4)$$

получим

$$\varphi(x_1, x_2) = \lambda \sum_{i=1}^{N} \tilde{k}_{1i}(x_1, x_2) u_i(x_2) + f(x_1, x_2). \qquad (5)$$

Подставляя (5) в (4), получим

$$u_i(x_2) = \int_{a_1}^{b_1} a_i(t_1) \left[\lambda \sum_{j=1}^{N} \tilde{k}_{1j}(t_1, x_2) u_j(x_2) + f(t_1, x_2)\right] dt_1,$$

или

$$u_i(x_2) - \lambda \sum_{j=1}^{N} \mu_{ij}(x_2) u_j(x_2) = f_i(x_2), \qquad (6)$$

где

$$\mu_{ij}(x_2) = \int_{a_1}^{b_1} a_i(t_1)\tilde{k}_{1j}(t_1, x_2)\, dt_1,\ \ f_i(x_2) = \int_{a_1}^{b_1} a_i(t_1) f(t_1, x_2)\, dt_1.$$

Так как $k_{1i}(x_1, x_2) \in L_\infty(D_2; L_{p_1}(D_1))$, $a_i(t_1) \in L_{q_1}(D_1)$, то $\mu_{ij}(x_2) \in L_\infty(D_2)$. Действительно,

$$\|\mu_{ij}\|_{L_\infty(D_2)} = ess \sup_{x_2} |\mu_{ij}(x_2)| = ess \sup_{x_2} \left| \int_{a_1}^{b_1} a_i(t_1)\tilde{k}_{1j}(t_1, x_2)\, dt_1 \right| \leq$$

$$\leq ess \sup_{x_2} \left[\int_{a_1}^{b_1} |a_i(t_1)| |\tilde{k}_{1j}(t_1, x_2)|\, dt_1 \right].$$

Применяя неравенство Гельдера с показателями p_1 и q_1, получим

$$\|\mu_{ij}\|_{L_\infty(D_2)} \leq ess \sup_{x_2} \left(\left[\int_{a_1}^{b_1} |a_i(t_1)|^{q_1}\, dt_1 \right]^{\frac{1}{q_1}} \left[\int_{a_1}^{b_1} |\tilde{k}_{1j}(t_1, x_2)|^{p_1}\, dt_1 \right]^{\frac{1}{p_1}} \right).$$

Выражение $\left[\int\limits_{a_1}^{b_1} |a_i(t_1)|^{q_1}\, dt_1\right]^{\frac{1}{q_1}}$ не зависит от x_2, получим

$$\|\mu_{ij}\|_{L_\infty(D_2)} \le \left[\int_{a_1}^{b_1} |a_i(t_1)|^{q_1}\, dt_1\right]^{\frac{1}{q_1}} ess\sup_{x_2}\left[\int_{a_1}^{b_1} |\tilde{k}_{1j}(t_1,x_2)|^{p_1}\, dt_1\right]^{\frac{1}{p_1}} =$$

$$= \|a_i\|_{L_{q_1}(D_1)}\|\tilde{k}_{1j}\|_{L_\infty(D_2;L_{p_1}(D_1))}.$$

(6) — система линейных алгебраических уравнений, определителем которой является функция

$$D(x_2,\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda\mu_{11}(x_2) & \dots & -\lambda\mu_{1N}(x_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda\mu_{N1(x_2)} & \dots & 1-\lambda\mu_{NN}(x_2) \end{vmatrix}.$$

$D(x_2,\lambda)$ — полином степени не выше N относительно переменной λ, тождественно не равный нулю ($D(x_2,0)=1$) с коэффициентами $\mu_{ij}(x_2) \in L_\infty(D_2;L_{p_1}(D_1))$, тогда $D(x_2,\lambda) \in L_\infty(D_2;L_{p_1}(D_1)) \in L_\infty(D_2;L_{p_1}(D_1))$, т.е. является существенно ограниченной функцией по переменной x_2 и имеющая не более N корней относительно λ. $D(x_2,\lambda)$ называется определителем Фредгольма ЧИ-уравнения (1), а корни уравнения $D(x_2,\lambda)=0$ называются характеристическими числами этого уравнения.

Теорема 1. *Если λ — не характеристическое число уравнения (1) с вырожденным ядром (3), то оно имеет единственное решение $\varphi(x) \in L_\infty(D_2;L_{p_1}(D_1))$, определяемое формулой (5) при любой функции $f(x_1,x_2) \in L_\infty(D_2;L_{p_1}(D_1))$.*

Если $D(x_2,\lambda) \ne 0$, то соответствующее однородное уравнение

$$\varphi(x_1,x_2) = \lambda\sum_{i=1}^{N}\tilde{k}_{1i}(x_1,x_2)\int_{a_1}^{b_1} a_i(t_1)\varphi(t_1,x_2)\,dt_1 \tag{7}$$

имеет только тривиальное решение $\varphi=0$ почти всюду. Действительно, если $f(x)=0$ почти всюду, то $f_i(x)=0$ почти всюду и система (6) обратится в систему линейных однородных уравнений с определителем не равным нулю. Такая система имеет только нулевые решения $u_i(x_2)=0$ $(i=\overline{1,N})$ почти всюду. Поэтому справедлива

Теорема 2. *Для того, чтобы уравнение (1) с вырожденным ядром (3) имело единственное решение $\varphi(x) \in L_\infty(D_2;L_{p_1}(D_1))$ для* *любой функции* $f(x_1, x_2) \in L_\infty(D_2; L_{p_1}(D_1))$, *необходимо и достаточно, чтобы соответствующее однородное уравнение (7) имело только тривиальное решение* $\varphi(x) = 0$ *почти всюду.*

Если решать систему (6) по формулам Крамера, а определители, стоящие в числителях разлагать по элементам столбца свободных коэффициентов, то получим

$$u_i(x_2) = \frac{1}{D(x_2,\lambda)} \sum_{j=1}^{N} D_{ij}(x_2,\lambda) f_j(x_2) \quad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

где $D_{ij}(x_2, \lambda)$ — полиномы степени не выше $N-1$ от λ.

Подставляя выражения для $u_i(x_2)$ в (5) получим

$$\varphi(x_1,x_2) = \lambda \sum_{i=1}^{N} \tilde{k}_{1i}(x_1,x_2) \frac{1}{D(x_2,\lambda)} \sum_{j=1}^{N} D_{ij}(x_2,\lambda) \times$$

$$\times \int_{a_1}^{b_1} a_j(t_1) f(t_1,x_2)\, dt_1 + f(x_1,x_2) =$$

$$= \lambda \int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{D(x_2,\lambda)} \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} D_{ij}(x_2,\lambda) \tilde{k}_{1i}(x_1,x_2) a_j(t_1) f(t_1,x_2)\, dt_1 +$$

$$+ f(x_1,x_2) = \lambda \int_{a_1}^{b_1} r_1(x_1,x_2;t_1) f(t_1,x_2)\, dt_1 + f(x_1,x_2),$$

где $r_1(x_1,x_2;t_1) = \frac{1}{D(x_2,\lambda)} \sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{N} D_{ij}(x_2,\lambda)\tilde{k}_{1i}(x_1,x_2) a_j(t_1)$ — резольвента уравнения (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-41-480002).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lyakhov L.N.* About Fredgholm equations for partial integral in $\mathbb{R}_2$ / L.N. Lyakhov, A.I. Inozemcev, N.I. Trusova // Jornal Of Mathematical Sciences. — Springer. — 2020. — Vol. 251. — № 6. P. 839–849.

2. *Иноземцев А.И.* О единственности решений частно-интегральных уравнений Фредгольма в анизотропных пространствах

функций Лебега / А.И. Иноземцев // Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики. – Вып. 15 ; Воронежский государственный университет ; факультет прикладной математики, информатики и механики. — Воронеж : ЗНБ ВГУ, 2021. С. 91–94.

3. *Сабитов К.Б.* Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения. — М: Высшая школа. 2005. — 671 с.

УДК 517.95

НЕРАВЕНСТВА КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА НА ОТРЕЗКЕ

Калябин Г.А.
Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия; gennadiy.kalyabin@gmail.com

Приводится обзор недавних (2009 – 2021) результатов по точным неравенствам типа Фридрихса-Колмогорова для функций из пространств Соболева произвольно высокого порядка с нулевыми условиями Дирихле на обоих концах.

Ключевые слова: пространства Соболева, точные константы, многочлены Лежандра.

KOLMOGOROV INEQUALITIES FOR SOBOLEV SPACES ON A SEGMENT

Kalyabin G.A.
Samara State Technical University, Samara, Russia; gennadiy.kalyabin@gmail.com

The survey is adduced of recent (2009 – 2021) results on sharp inequalities of Friedrichs-Kolmogorov type for Sobolev spaces of arbitrarily high order with zero Dirichlet conditions on both ends.

Key words: Sobolev spaces, sharp constants, Legendre polynomials

1. Обозначения и постановка задачи

В работе автора [1] рассмотрены пространства Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^r(-1,1)$, состоящие из всех функций $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, обладающих абсолютно непрерывными производными до порядка $(r-1)$, таких, что $f^{(r)} \in L_2(-1,1)$, и выполняются граничные условия Дирихле:

$$f^{(s)}(\pm 1) = 0,\ s \in \{0, 1, \dots r-1\}; \tag{1}$$

при этом норма f в $\overset{\circ}{W}{}_2^r(-1,1)$ определяется равенством:

$$\|f\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^r(-1,1)} := \Big(\int_{-1}^{1} |f^{(r)}(t)|^2\, dt \Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

Для фиксированных $x \in [-1,1], \quad k \in \{0, 1, \dots r-1\}$, поставим задачу нахождения величин

$$A_{r,k}(x) := \max\{\, |f^{(k)}(x)| : \|f\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^r(-1,1)} \le 1\}; \tag{3}$$

Другими словами, $A_{r,k}^2(x)$ суть наименьшие возможные положительные числа, при которых выполняются неравенства Фридрихса-Колмогорова:

$$|f^{(k)}(x)|^2 \le A_{r,k}^2(x) \int_{-1}^{1} |f^{(r)}(t)|^2\, dt, \quad \forall f \in \overset{\circ}{W}{}_2^r(-1,1) \tag{4}$$

Библиографию по точным константам в неравенствах колмогоровского типа для промежуточных производных можно найти, например, в монографиях [2, § 2.4] и [3].

Важнейшую роль в нахождении $A_{r,k}(x)$ играют классические многочлены Лежандра $P_n(x)$ и их первообразные

$$P_n^{(-s)}(x) := \frac{\big((1-x^2)^n\big)^{(n-s)}}{(2^n n!)}; \quad 0 \le s \le n. \tag{5}$$

2. Формулировка основных результатов

В [1] были получены явные формулы для $A_{r,k}^2(x)$.

Теорема. *Для всех целых* $r, k, 0 \le k < r$ *выполнено*:

$$A_{r,k}^2(x) = \sum_{n=r}^{\infty} \Big(P_n^{(k-r)}(x)\Big)^2 (n+0.5); \tag{5}$$

$$A_{r,k}^2(x) = A_{r-k,0}^2(x) - \sum_{n=r-k}^{r-1} \Big(P_n^{(k-r)}(x)\Big)^2 (n+0.5), \tag{6}$$

а для $k = 0$ *имеет место равенство*

$$A_{r,0}^2(x) = \frac{(1-x^2)^{2r-1}}{(2r-1)\ 2^{2r-1}\ ((r-1)!)^2}. \tag{7}$$

Введем теперь величины $\Lambda_{r,k} := \max\{A_{r,k}(x) : |x| \le 1\}$, которые являются нормами операторов вложения пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^r\,(-1,1)$ в пространство $C^k(-1,1)$ всех k раз непрерывно дифференцируемых функций с конечной нормой
$\|f\|_{C^k(-1,1)} := \max\{|f^{(k)}(x)| : |x| \le 1\}$.

Приведенные формулы (6), (7), в сочетании со стандартными методами исследования на экстремум, позволяют вывести следующие соотношения.

Следствие. (i) $\Lambda_{r,0}^2 = A_{r,0}^2(0) = \left((2r-1)\ 2^{2r-1}\ ((r-1)!)^2\right)^{-1}$.

(ii) *Величина* $A_{r,1}(x)$, $(r \ge 2)$, *в точке* $x = 0$. *имеет (единственный на* $(-1,1)$ *) локальный* **минимум**, *а*

$$\Lambda_{r,1}^2 = A_{r,1}^2\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{2r-1}}\right) = \frac{(2r-2)^{2r-4}}{(4r-2)^{2r-3}(2r-3)\ ((r-2)!)^2}$$

.

(iii) *Величина* $A_{r,2}(x)$, $(r \ge 3)$, *достигает* **максимума** *на* $[-1,1]$ *в точке* $x = 0$ *и*

$$\Lambda_{r,2}^2 = A_{r,2}^2(0) = \left((2r-5)\ 2^{2r-3}\ ((r-2)!)^2\right)^{-1}. \tag{9}$$

2. Дальнейшие гипотезы и продвижения

Исследование экстремумов величин (6) при $k > 2$ становится технически весьма затруднительным; например, в [4] были получены неверные формулы для $\Lambda_{r,4}$ и $\Lambda_{r,6}$.

Исходя из утверждений следствия в [1, §3], были выдвинута гипотеза о том, что $\Lambda_{r,k} = A_{r,k}(0), r > k$ при **четном** k , а при k нечетном величина $A_{r,k}(x)$ имеет в точке $x = 0$ локальный **минимум**. Подтверждение этих предположений получено в [5] , где также построены экстремальные сплайны и найдены явные выражения для $\Lambda_{r,3}$ и $\Lambda_{r,5}$.

В недавней работе [6] даются формулы для $\Lambda_{r,k}$ при всех **четных** $k < r$ в терминах гипергеометрических функций.

Отметим, что случай **нечетных** k, $5 < k < r$, остается неисследованным.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 08-01-00443, 14-01-00684) и DFG (проект GZ: 436 RUS 113/903/0-1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калябин Г.А.* Точные оценки для производных функций из классов Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^r\,(-1,1)$. // Тр. МИРАН. 2010. Т. 269. С. 143–149.

2. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976.

3. *Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Выпуклый анализ и его приложения. М.: УРСС Эдиториал, 2000.

4. *Мукосеева Е.В., Назаров А.И.* О симметрии эктремали в некоторых теоремах вложения // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2014. Т. 425. С. 35–45.

5. *Шейпак И.А., Гарманова Т.А.* Явный вид экстремалей в задаче о константах вложения в пространствах Соболева // Тр. ММО. 2019. Т. 80. Вып. 2. С. 221–246.

6. *Шейпак И.А., Гарманова Т.А.* О точных оценках производных четного порядка в пространствах Соболева // Функциональный анализ и его приложения. 2021. Т. 55. Вып. 1. С. 43–55.

УДК 517.95

СИНГУЛЯРНЫЙ ОПЕРАТОР КИПРИЯНОВА–ЛАПЛАСА НА СФЕРЕ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ БЕССЕЛЯ

Ляхов Л.Н, Санина Е.Л.

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия; levnlya@mail.ru, sanina08@mail.ru

Изучается сингулярный оператор Киприянова—Лапласа на сфере в $\mathbb{R}_n$ *с отрицательными параметрами оператора Бесселя. Доказывается, что если эти параметры удовлетворяют неравенствам* $0 > \gamma_i > -1$ *, то отвечающий этим значениям* γ_1 *оператор Киприянова имеет размерность* $\alpha = n + |\gamma| \in [n, n+1]$ *.*

Ключевые слова: оператор Лапласа—Бесселя, оператор Киприянова, размерность евклидовой области, фракталы.

KIPRIYANOV–LAPLACE SINGULAR OPERATOR ON A SPHERE WITH NEGATIVE BESSEL PARAMETERS

Lyakhov L.N., Sanina E.L.
Voronezh State University, Voronezh, Russia;
levnlya@mail.ru, sanina08@mail.ru

We study the Kipriyanov—Laplace singular operator on the sphere in $\mathbb{R}_n$ *with negative parameters of the Bessel operator. It is proved that if these parameters satisfy the inequalities* $0 > \gamma_i > -1$ *, then corresponding to these values* γ_1 *Kipriyanov operator has the dimension* $\alpha = n + |\gamma| \in [n, n+1]$ *.*

Key words: the Laplace-Bessel operator, Kipriyanov operator, dimension of the Euclidean area, fractals.

Оператором Лапласа—Киприянова будем называть следующий сингулярный дифференциальный оператор

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^{n} B_{\gamma_i}, \quad B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{1}{x_i^{\gamma_i}}\frac{\partial}{\partial x_i} x_i^{\gamma_i}\frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{1}$$

где $-1 < \gamma_i \leq 0.$

Если все $\gamma_i = 0$, то этот оператор оказывается оператором Лапласа; если же выполняется строгое неравенство $-1 < \gamma_i < 0$, то такой оператор называется оператором Киприянова.

В [1] для $\gamma_i > -1$ получено следующее представление оператора Киприянова в сферических координатах $x = r\Theta$, $\Theta = \Theta(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$, $|\Theta| = 1$,

$$\Delta_B = \Delta_{B,r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{B,\theta}\,,$$

где $\Delta_{B,r}$ — радиальная, а $\Delta_{B,\Theta}$ — сферическая составляющие оператора, соответственно

$$\Delta_{B,r} = B_{\mu,r} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}, \quad \mu = n + |\gamma| - 1\,,$$

$$\Delta_{B,\Theta} = \sum_k \frac{1}{q_k(\theta)\,(\sin\theta_k)^{n+|\gamma^{(k)}|-k-1}(\cos\theta_k)^{\gamma_k}}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_k}(\sin\theta_k)^{n+|\gamma^{(k)}|-k-1}(\cos\theta_k)^{\gamma_k}\frac{\partial u}{\partial\theta_k}\,,$$

где $|\gamma^{(k)}| = |\gamma| - \gamma_1 - \ldots - \gamma_k$, $q_k(\theta) = (\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{k-1})^2$. Отметим, что при выполнении условия $-1 < \gamma_i \le 0$ число $|\gamma|$ — неположительное. Но при этом $n + |\gamma|$ всегда строго положительное.

Хорошо известно, что именно симметрия обуславливает взаимосвязи сил в природе. Приведу цитату ([1], с. 12): „Математический анализ сил, ответственных за формирование материи ... выявляет наличие скрытых симметрий с тонкими свойствами“. Такие „скрытые симметрии с тонкими свойствами“ здесь (и в [2]) изучаются на основе специальной интегральной меры со слабой особенностью по каждой их евклидовых переменных.

Области евклидова пространства точек, которым непрерывно меняющаяся размерность приписывается на основе сферической симметрии, вводились в [3], [4] и в [2]. Существование дробно-мерных пространств или областей, порожденных сферической симметрией вытекает из приводимых в работе примеров соответствующих фракталов (множество Кантора, ковер и куб с полыми сферами). Расстояние между точками в таком дробно-мерном пространстве определяется через посредство „обобщенного сдвига Пуассона“ из семейства обобщенных сдвигов Левитана.

Отметим, что далее теорема представляют собой один из вариантов обобщения теоремы Киприянова—Иванова, названой в [5] „теоремой о сложении особенностей“.

Дробная размерность оператора Лапласа

Пусть оператор Бесселя имеет дробный параметр $\beta = [\,\beta\,] + \{\beta\}$ с целой частью $[\,\beta\,] = n - 1$. Тогда, полагая $t{=}|x|{=}\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ или $t{=}|x|{=}\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2}$, имеем два равенства (первое из которых хорошо известно [6], а второе вытекает из представления оператора Киприянова—Бельтрами [2], примененного к радиальной функции):

$$B_\beta f(t) = \Delta_n f(|x|) + \frac{\{\beta\}}{x_1}\,\frac{\partial f(|x|)}{\partial x_1}, \qquad 0 < \{\beta\} < 1\,,$$

$$B_\beta f(t){=}\Delta_{n+1} f(|x|){+}\frac{(-1{+}\{\beta\})}{x_i}\,\frac{\partial_i f(|x|)}{\partial x_i}, \quad -1{+}\{\beta\}{=}\gamma_i,\ \ 0{>}\gamma_i{>}-1\,.$$

Основной математической характеристикой фракталов является именно дробная размерность.

Если в первой формуле $\{\beta\}\to 0$, а во второй $\{\beta\}\to 1$, то оператор Бесселя окажется либо оператором Лапласа в $\mathbb{R}_n$ или в $\mathbb{R}_{n+1}$. При этом число $\beta{+}1{=}n{+}\{\beta\}{\in}(n,n{+}1)$ и поэтому имеет законное право называться дробной размерностью оператора Лапласа. При этом каждая евклидова координатная ось x_i (с $\gamma_i\neq 0$) приобретает дробную размерность $1+\gamma_i,\ \gamma_i>-1$.

Справедлива следующая теорема о сложении дробных размерностей осей координат.

Теорема. *Пусть произвольное положительное число β связано с мультииндексом $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$, $\gamma_i>-1$ равенством $\beta{=}n{+}\gamma_1{+}\ldots{+}\gamma_n=n{+}|\gamma|$ и пусть функция $f\in C^2([0,\infty))$ четная по Киприянову ([6], с. 21). Тогда*

$$B_{\beta-1}f(r)=\Delta_B f(|x|)\,,\quad r=|x|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}, \tag{2}$$

где Δ_B сингулярный дифференциальный оператор (1). При этом, если $[\,|\gamma|\,]$ и $\{\,|\gamma|\,\}$ целая и дробная части числа $|\gamma|$, то

$$\lim_{\{|\gamma|\}\to 1} B_{\beta-1}f(r)=\Delta f(|x|),\quad x\in\mathbb{R}_{n+1+[\,|\gamma|\,]}\,,\quad \text{\textit{при}}\quad \{|\gamma|\}<0\,,$$

$$B_{\underline{-}1}f(r)=\Delta f(|x|),\quad x\in\mathbb{R}_{n+|\gamma|}\,,\quad \text{\textit{при}}\quad \{|\gamma|\}=0,$$

$$\lim_{\{|\gamma|\}\to 0} B_{\underline{-}1}f(r)=\Delta f(|x|),\quad x\in\mathbb{R}_{n+[\,|\gamma|\,]}\,,\quad \text{\textit{при}}\quad \{|\gamma\}>0.$$

Отметим, что для $\gamma_i>0$ формула (2) известна [3], [5], [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Девис П.* Суперсила. Поиск единой теории природы. М.Мир, 1989. С. 272.

2. *Ляхов Л.Н., Санина Е.Л.* Оператор Киприянова—Бельтрами с отрицательной размерностью оператора Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B-гармонического уравнения // Дифференц. уравнения, 2020, Т. 56, № 12. С.1610-1520.

3. *Ляхов Л.Н.* Построение ядер Дирихле и Валле-Пусена—Никольского для j-бесселевых интегралов Фурье. // Тр. Московского Математ. Общества. 2015. Т.76. Вып. 1. С. 67–84.

Встречаются работы, в которых оператор Лапласа обобщается путем введения нецелочисленной размерности d_s в параметре $\gamma=d_s-1$ оператора Бесселя B_γ , см., например, [7].

4. *Ляхов Л.Н.* О радиальных функциях классических стационарных уравнениях в евклидовых пространствах дробной размерности.// Минск. Издательский центр БГУ. 2012. AMADE–2011. С. 115–126

5. *Киприянов И.А., Иванов Л.А.* Получение фундаментальных решений для однородных уравнений с особенностями по нескольким переменным. Новосибирск 1983. Тр. семинара С.Л. Соболева. № 1. С.55–77.

6. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи / И. А. Киприянов. – М. : Наука, 1997. – 199 с.

7. *Metzler, Walter G. G16ckle, Theo F. Nonnenmacher.* Fractional model equation for anomalous diffusion // Physica A 211 (1994). P. 13-24.

УДК 517.962

ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННАЯ ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА ДВУХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА С ДВУМЯ ФИКСИРОВАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ СИНГУЛЯРНЫМИ ЛИНИЯМИ В ЯДРАХ

Раджабов Н.

Таджикский Национальный Университет, Таджикистан;
nusrat38@mail.ru

В работе в первые рассматривается переопределенная система интегральных уравнений вольтерровских типов с сингулярными ядрами . Доказано что когда выполнена условие совместности , для нахождение некоторых случаях , задача сводится к нахождение решения одномерного сингулярного интегрального уравнения вольтерровского типа теория которой было разработано в работах автора раньше. В зависимости от знака значении функции присутствующие в ядрах системы , найдено многообразия решений данной системы.

Ключевые слова: переопределенная система интегральных уравнений, сингулярные ядра, интегральные представления, многообразия решений.

OVERDETERMINED SYSTEM VOLTERRA TYPE INTEGRAL EQUATION WITH TWO FIXED SINGUlLAR LINES IN KERNELS

Rajabov N.
Tajik National University, Tajikistan;
nusrat38@mail.ru

In this work in first time consider over determined Volterra type system integral equation with singular kernels . Proof that , when in other fulfillment consist condition , problem found solution over determined Volterra type system integral equation with singular lines , red use two problem found solution one-dimensional Volterra type singular integral equation , theory will by prepare in works author this article. In depend signs value functions representable in kernels volterra type system integral equation , found manifold solution consideration system integral equation.

Key words: over determined system integral equation , singular kernels, integral representation, manifold solution.

Через D обозначим прямоугольник $D = \{(x,y) : a < x < b,\ a < y < b\}$. Соответственно обозначим $\Gamma_1 = \{a < x < b,\ \ y = b\}$, $\Gamma_2 = \{\ x = a\ , a < y < b\}$. В области D рассмотрим следующую переопределённую систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \varphi(x,y) + \int_a^x \frac{A(t)\varphi(t,y)}{t-a} dt = f(x,y), \\ \varphi(x,y) + \int_b^y \frac{B(s)\varphi(x,s)}{s-b} ds = g(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

где $A(x)$, $B(y)$, $f(x,y)$, $g(x,y)$ заданные функции соответственно на Γ_1 , Γ_2 , D , $\varphi(x,y)$ – искомая функция.

Решение системы (1) будем искать в классе функций $\varphi(x,y) \in C(\overline{D})$, $\varphi(a,b) = 0$ со следующим асимптотическим поведением:

$$\varphi(x,y) = 0\left[(x-a)^{\varepsilon}(y-b)^{\varepsilon}\right], \quad \varepsilon > 0 \quad \text{при}\,(x,y) \to (a,b). \tag{2}$$

Проблеме исследованием интегральных уравнений типов Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверх- сингулярными точками посвящено [1 – 4]

Систему (1) будем изучать при предположении , что $A(a) \neq 0$, $B(b) \neq 0$

Пусть в системе (1) основным уравнением является первое уравнение системы и $A(a) < 0$, $B(b) < 0$.

В этом случае, согласно [1] , когда $A(a) < 0$.если решение первого уравнения системы (1) существует, тогда она даётся формулой

$$\varphi(x,y) = (x-a)^{|A(a)|}\exp\left[-W_A^1(x)\right]C_1(y) + f(x,y) -$$

$$-\int_a^x \exp\left[W_A^1(t) - W_A^1(x)\right]\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{|A(a)|}\frac{f(t,y)}{t-a}dt, \qquad (3)$$

где $C_1(y)$ - произвольная функция точек Γ_2 , $W_A^1(x) = \int_a^x \frac{A(t)-A(a)}{t-a}dt$.

Решение вида (3) существует, если функция $A(x)$ удовлетворяет условию Гельдера , $f(x,y) \in C\left(\overline{D}\right)$, $f(a,y) = 0$ с асимптотическим поведением

$$f(x,y) = o\left[(x-a)^{\gamma_6}\right], \quad \gamma_6 > |A(a)| \quad \text{при} \quad x \to a, \qquad (4)$$

$f(x,b) = 0$ с асимптотическим поведением

$$f(x,y) = o\left[(y-b)^{\varepsilon}\right], \quad \varepsilon > 0 \quad \text{при} \quad y \to b. \qquad (5)$$

Найденное значение $\varphi(x,y)$ из (3) подставляя в второе уравнение системы (1) , после некоторых преобразований приходим к следующему равенству

$$C_1(y) + \int_b^y \frac{B(s)\,C_1(s)}{s-b}ds = (x-a)^{A(a)}\exp\left[W_A^1(x)\right](g(x,y) - f(x,y)) +$$

$$+\int_a^x (t-a)^{A(a)-1}\exp\left[W_A^1(t)\right]A(t)\,f(t,y)\,dt +$$

$$+\int_a^x (t-a)^{A(a)-1}\exp\left[W_A^1(t)\right]A(t)\;dt\int_b^y \frac{B(s)\,f(t,s)}{s-b}ds. \qquad (6)$$

В силу независимости левой части этого выражение от переменного x ,имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(x-a)^{A(a)}exp\left[W_A^1(x)\right](g(x,y) - f(x,y))\right] +$$

$$+(x-a)^{A(a)-1}exp\left[W_A^1(x)\right]A(x)\left[f(x,y) + \int_b^y \frac{B(s)\,f(x,s)}{s-b}ds\right] = 0. \qquad (7)$$

Отсюда

$$(x-a)^{A(a)-1} exp\left[W_A^1(x)\right] A(x)\left[f(x,y)+\int_b^y \frac{B(s) f(x,s)}{s-b} ds\right]=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x}\left[(x-a)^{A(a)} exp\left[W_A^1(x)\right](g(x,y)-f(x,y))\right].$$

В этом равенстве выполняя операцию дифференцирования , получим

$$A(x) g(x,y)+(x-y) \frac{\partial}{\partial x}[g(x,y)-f(x,y)]+A(x) \int_b^y \frac{B(s) f(x,s)}{s-b} ds=0. \tag{8}$$

Принимая во внимание это равенство, будем иметь

$$C_1(y)+\int_b^y \frac{B(s) C_1(s)}{s-b} ds=(x-a)^{A(a)} exp\left[W_A^1(x)\right](g(x,y)-f(x,y))-$$

$$-\int_a^x \frac{\partial}{\partial t}\left[(t-a)^{A(a)} exp\left[W_A^1(t)\right](g(t,y)-f(t,y))\right] dt.$$

или

$$C_1(y)+\int_b^y \frac{B(s) C_1(s)}{s-b} ds=\left[(t-a)^{A(a)} exp\left[W_A^1(t)\right](g(t,y)-f(t,y))\right]_{t=a}.$$

Но в силу условия (3.2) $\left[(t-a)^{A(a)} f(t,y)\right]_{t=a}=0$ и $\left[W_A^1(t)\right]_{t=a}=0$. Поэтому, если существует предел

$$\left[(x-a)^{A(a)} g(x,y)\right]_{x=a}=G(y), \tag{9}$$

тогда, для определение $C_1(y)$ получим следующее одномерное интегральное уравнение, теория которой хорошо разработано в [1].

$$C_1(y)+\int_b^y \frac{B(s) C_1(s)}{s-b} ds=G(y). \tag{10}$$

Пусть в интегральном уравнении (10) , $B(b)<0$, $B(y)$ в окрестности точек $y=b$ удовлетворяет условию Гёльдера, $G(y)\in C\left(\overline{\Gamma_2}\right)$, $G(b)=0$ с асимптотическим поведением

$$G(y)=o\left[(y-b)^{\gamma_7}\right], \quad \gamma_7>|B(b)| \quad \text{при} \quad y\to b. \tag{11}$$

Тогда, согласно [1], интегральное уравнение (10) всегда разрешимо и его общее решение даётся формулой

$$C_1(y) = (y-b)^{|B(b)|} exp\left[-W_B^1(y)\right] \mathrm{C}_1 + G(y) \; -$$

$$\int_b^y \exp\left[W_B^1(s) - W_B^1(y)\right] \left(\frac{y-b}{s-b}\right)^{|B(b)|} \frac{B(s)\,G(s)}{s-b} ds,$$

где

$$W_B^1(y) = \int_b^y \frac{B(s) - B(b)}{s-b} ds.$$

Подставляя это значение $C_1(y)$ в формулу (3) , находим общее решение системы (1) в этом случае

$$\varphi(x,y) = (x-a)^{|A(a)|} exp\left[-W_A^1(x)\right] \Big[(y-b)^{|B(b)|} exp\left[-W_B^1(y)\right] \mathrm{C}_1 + G(y)$$

$$-\int_b^y \exp\left[W_B^1(s) - W_B^1(y)\right] \left(\frac{y-b}{s-b}\right)^{|B(b)|} \frac{B(s)\,G(s)}{s-b} ds +$$

$$f(x,y) - \int_a^x exp\left[W_A^1(t) - W_A^1(x)\right] \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{|A(a)|} \frac{A(t)\,f(t,y)}{t-a} dt. \quad (12)$$

Таким образом, доказано

Теорема 1.*Пусть в системе (1) $f(x,y) \in C\left(\overline{D}\right)$, $g(x,y) \in C\left(\overline{D}\right)$, $A(x) \in C\left(\overline{\Gamma_1}\right)$, $B(y) \in C\left(\overline{\Gamma_2}\right)$, $A(a) < 0$,$B(b) < 0$. Функции $A(x)$, $B(y)$ в окрестности точек $x = a$ и $y = b$ удовлетворяют условии Гёльдера. Функция $f(x,y)$ обладает свойством: $f(a,b) = 0$ с асимптотическим поведением*

$$f(x,y) = 0\left[(x-a)^{\gamma_8}(y-b)^{\varepsilon}\right], \gamma_8 > |A(a)| \quad \textit{при} \quad (x,y) \to (a,b).$$

Функция $g(x,y)$ такова, что существует придел вида (9), причём $G(b) = 0$ с асимптотическим поведением (11). Функции $f(x,y)$, $g(x,y)$ удовлетворяют условие совместности (8).Тогда однородная система (1) имеет одно решение вида

$$\varphi_0(x,y) = (x-a)^{|A(a)|}(y-b)^{|B(b)|} \exp\left[-W_B^1(y) - W_A^1(x)\right].$$

Неоднородная система (1) всегда разрешимо, и его общее решение содержит одну произвольную постоянную и даётся формулой (12), где C_1 произвольная постоянная.

Замечание 1. Аналогичные результаты получены и в случае, когда $A(a) < 0$, $B(b) > 0$.

Замечание 2. Исследовано и случай, когда основным уравнением является второе уравнение системы (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Раджабов Н.* Интегральные уравнении типов Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложения, Душанбе 2007, Из-во “ Деваштич” , 222с.

2. *Rajabov N.* Volterra type integral equation with boundary and interior fixed singVolterra ularity and super-singularity kernels and their application , LAP LAMBERT Academic Publishing , Germany 2011, 251p.

3. *Rajabov N.* To Theory One Class of Three – Dimensional Kernels by Tube Domain. Journal of Mathematics and Statistical Science (ISSN, 2411-2518), vol.5, 309-322.

4. *Rajabov N.* Volterra type integral equation with super-singular kernels// Functional Analysis in Interdisciplinary Applications , Springer International Publishing AG 2017, pp. 312-319.

5. *Rajabov N.* New Method for Volterra Type Integral Equation with Boundary Singular Point// New Trends in Analysis and Interdisciplinary Applications(select contributions of the 10th ISAAC Congress, Macau 2015), Birkhauser, pp. 121-127.

УДК 968.220

О ЯВНЫХ РЕШЕНИЯХ ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА С ГРАНИЧНОЙ ОСОБОЙ И СИЛЬНО-ОСОБЫМИ ЛИНИЯМИ, КОГДА КОРНИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЕЩЕСТВЕННЫЕ И РАВНЫЕ

Раджабова Л.Н., Ахмадов Ф.М.
Таджикский национальный университет,
Институт туризма, предпринимательства и сервиса,
lutfya62@mail.ru; farvardinahmadov@gmail.com

В работе изучены двумерные интегральные уравнения типа Вольтерра с особой и сильно-особой линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и равные. В зависимости от знака параметров уравнения, получены явные представления многообразия решений через произвольные функции.

Ключевые слова: двумерное интегральное уравнения, граничная особая линия, граничная сильно-особая линия, характеристическое уравнение.

Rajabova L.N., Ahmadov F.M. *

ON EXPLICIT SOLUTIONS OF TWO-DIMENSIONAL VOLTERRA-TYPE INTEGRAL EQUATIONS WITH BOUNDARY SINGULAR AND STRONGLY SINGULAR LINES, WHEN THE ROOTS OF THE CHARACTERISTIC EQUATIONS ARE REAL AND EQUAL

Tajik National University,
Institute of Tourism, Entrepreneurship and Service
lutfya62@mail.ru; farvardinahmadov@gmail.com

In this paper, we study two-dimensional integral equations of the Volterra type with special and strongly-special lines, when the roots of the characteristic equations are real and equal. Depending on the sign of the equation parameters, explicit representations of the variety of solutions through arbitrary functions are obtained.

Key words: two-dimensional integral equation, boundary special line, boundary strongly-special line, characteristic equation.

Пусть D – прямоугольник $D = \{(x,y) : a < x < a_1, b < y < b_1\}$ с границами $\Gamma_1 = \{y = b,\ a < x < a_1\}$, $\Gamma_2 = \{x = a,\ b < y < b_1\}$. В области D рассмотрим двумерное интегральное уравнение:

$$u(x,y) + \int_a^x \left[p + q\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{u(t,y)}{t-a}dt+$$

$$+\int_b^y \left[\lambda + \mu\big(\omega_b^\beta(s) - \omega_b^\beta(y)\big)\right]\frac{u(x,s)}{(s-b)^\beta}ds+\int_a^x \left[p_1 + q_1\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{dt}{t-a}\times$$

$$\times\int_b^y \left[\lambda_1 + \mu_1\big(\omega_b^\beta(s) - \omega_b^\beta(y)\big)\right]\frac{u(t,s)}{(s-b)^\beta}ds = f(x,y), \qquad (1)$$

где p, q, λ, μ, p_1, q_1, λ_1, μ_1 — заданные постоянные числа, $f(x,y)$ — заданная функция, $u(x,y)$ — искомая функция, $\omega_b^\beta(s) = \left[(\beta-1)(y-b)^{\beta-1}\right]^{-1}$, $\beta > 1$.

Ранее мы рассматривали двумерное интегральное уравнение типа Волльтера (1) в случае, когда корни характеристических уравнений вещественные и разные [1]. В данной работе изучается случай, когда корни характеристических уравнений вещественные и равные.

Работы Н.Раджабова [2-4] посвящены исследованию одномерных интегральных уравнений типа Вольтерра с фиксированным левым , правым сингулярным или сверх-сингулярным ядрами, модельных одномерных интегральных уравнений типа Вольтерра со сверхсингулярной точкой, также получено многообразие решений одномерного интегрального уравнения с сингулярной и логарифмической особенностью в ядре. Работы [5-8] Н.Раджабова, Л.Н.Раджабовой и их учеников посвящены изучению интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода с фиксированными особыми или сильноособыми точками, линиями и изучению некоторых случаев многомерных особых интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода.

Решение интегрального уравнения (1) будем искать в классе функций $u(x,y) \in C(\overline{D})$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} u(x,y) = 0$ с асимптотическим поведением:

$u(x,y) = o[(x-a)^\varepsilon],\ \varepsilon > 0$ при $x \to a$,

$u(x,y) = o[(y-b)^\nu],\ \nu > 2\beta - 1$ при $y \to b$.

Если параметры уравнения (1) связаны между собой равенствами

$$p = p_1,\ q = q_1,\ \lambda = \lambda_1,\ \mu = \mu_1, \tag{2}$$

тогда после некоторых преобразований данное уравнение можно представить в виде произведения следующих интегральных операторов:

$$\Pi^y_{\lambda,\mu}\left(\mathrm{T}^x_{p,q}(u)\right) = f(x,y), \tag{3}$$

где

$$\mathrm{T}^x_{p,q}(u) = u(x,y) + \int\limits_a^x \left[p + q\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{u(t,y)}{t-a}dt = \psi(x,y), \tag{4}$$

$$\Pi^y_{\lambda,\mu}(\psi) = \int\limits_b^y \left[\lambda + \mu\big(\omega_b^\beta(s) - \omega_b^\beta(y)\big)\right]\frac{\psi(x,s)}{(s-b)^\beta}ds = f(x,y). \tag{5}$$

Согласно [3], в случае, когда решение интегрального уравнения (3) при $\lambda > 0,\ \ \lambda^2 - 4\mu = 0$ существует, тогда оно представимо в виде:

$$\psi(x,y) = f(x,y) - \int\limits_b^y e^{\frac{\lambda}{2}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))}\left[\lambda + \frac{\lambda^2}{4}(\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s))\right]\frac{f(x,s)}{(s-b)^\beta}ds \tag{6}$$

Соответственно, если решение интегрального уравнения (6) при $p < 0,\ \ p^2 - 4q = 0,$ существует [4], тогда оно имеет вид:

$$u(x,y) = (x-a)^{\frac{|p|}{2}}\left[\theta_1(y) + \ln(x-a)\theta_2(y)\right] + \psi(x,y) +$$

$$+\frac{|p|}{2}\int\limits_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}}\left[2 + \frac{|p|}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{\psi(t,y)}{t-a}dt. \tag{7}$$

В равенстве (4) вместо функции $\psi(x,y)$ подставляя её значение из (6) получим решение интегрального уравнения (1) в виде:

$$u(x,y) = (x-a)^{\frac{|p|}{2}}\Theta(y) + \mathrm{M}_{p,\lambda}\left[f(x,y)\right] = \mathrm{N}_{p,\lambda}\left[0,0,\psi_1(y),\psi_2(y),f(x,y)\right] \tag{8}$$

где

$$\Theta(y) = \psi_1(y) + \ln(x-a)\psi_2(y),$$

$$M_{p,\lambda}\big[f(x,y)\big] = f(x,y) + \frac{|p|}{2}\int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}}\left[2 + \frac{|p|}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{f(t,y)}{t-a}dt +$$

$$+\int_b^y e^{\frac{\lambda}{2}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))}\left[\lambda + \frac{\lambda^2}{4}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))\right]\frac{f(x,s)}{(s-b)^\beta}ds +$$

$$+\frac{|p|}{2}\int_b^y e^{\frac{\lambda}{2}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))}\left[\lambda + \frac{\lambda^2}{4}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))\right]\frac{ds}{(s-b)^\beta}\times$$

$$\times\int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}}\left[2 + \frac{|p|}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{f(t,s)}{t-a}dt$$

Из приведенных выше результатов вытекают следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть в интегральном уравнении (1) параметры удовлетворяют условиям: (2), также* $\lambda > 0, \Delta_1 = \lambda^2 - 4\mu = 0$, $p < 0$, $\Delta_2 = p^2 - 4q = 0$. *Кроме того, пусть* $f(x,y) \in C(\overline{D})$, $f(a,b) = 0$ *на* Γ_1 *и* Γ_2 *с асимптотическим поведением:*
$f(x,y) = o\Big[(x-a)^{\delta_1}\Big]$, $\delta_1 > \frac{|p|}{2}$, *при* $x \to a$,

$f(x,y) = o\Big[(y-b)^{\nu_1}\Big]$, $\nu_1 > 2\beta - 1$, *при* $y \to b$. *Тогда двумерное интегральное уравнение вида (1) в классе функций* $u(x,y) \in C(\overline{D})$, *обращающиеся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$, *всегда разрешимо и его общее решение содержит две произвольные функции одной переменной и выражается равенством (8)*
где $\psi_1(y), \psi_2(y)$ *— произвольные непрерывные функции, обращающиеся в нуль при* $y \to b$, *поведения которых определяются из асимптотической формулы:*
$\psi_j(y) = o\big[(y-b)^{\nu_2}\big]$, $\nu_2 > 2\beta - 1$, *при* $y \to b$, $j = (1,2)$.

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы 1 любое решение уравнения (1) из класса* $C(\overline{D})$ *обращается в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2 *с асимптотическим поведением:*
$u(x,y) = o[(x-a)^{\delta_3}], \delta_3 > \frac{|p|}{2}$, *при* $x \to a$,

$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu_3}]$, $\nu_3 > 2\beta - 1$, *при* $y \to b$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Раджабова Л.Н., Ахмадов Ф.М.* К теории двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с граничными особой и сильно-особыми линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и разные // Вестник ТНУ.серия естественных наук. 2021. №1. С .78–88.

2. *Раджабов Н.* Интегральные уравнении типа Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложения. Душанбе.: Деваштич, 2007. 221 с.

3. *Раджабов Н.* Об одном классе модельного сверхсингулярного интегрального уравнения, обобщающего одномерное интегральное уравнение Вольтерра с левой граничной сверхсингулярной точкой в ядре // Материалы III междунар. конф. "Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры". Актобе, 2015. С. 202–206.

4. *Раджабов Н.* Об одном классе модельного сингулярного интегрального уравнения, обобщающего одномерное интегральное уравнение Вольтерра с левой граничной сингулярной точкой в ядре // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. 2012. №1. С.21–32.

5. *Раджабов Н. Раджабова Л.Н.* Введение в теорию многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра с фиксированными сингулярными и сверхсингулярними ядрами и их приложении. Germany.: LAPLAMBERT academic publishing, 2011. 502 p.

6. *Раджабов Н., Раджабова Л.Н., Зарипов С.Б.* Двумерные симметричные интегральные уравнения типа Вольтерра с сингулярными и сверхсингулярными линиями. Saarbiicken.: LAP LAMBERT, Academic Publishing, 2019. 108 p.

7. *Раджабова Л.Н., Шукурова Г.Н.* О некоторых случаях симметричных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особенностью и логарифмической особенностью в ядре // ДАН РТ. 2017. Т. 61. №3-4. С. 231–240.

8. *Раджабова Л.Н., Хушвахтов М.Б.* О некоторых случаях немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе // ДАН РТ. 2019. Т. 62. №9-10. С. 533–540.

УДК 517.98

ВЕСОВОЙ ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР. ОГРАНИЧЕННОСТЬ

Трусова Н.И.
Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского, г. Липецк, Россия;
trusova.nat@gmail.com

Рассматривается весовой частно-интегральный оператор, действующий на функции, определенные на конечном прямоугольнике $D = D_1 \times D_2 = (0, b_1) \times (0, b_2) \in \mathbb{R}_2$ *по второй переменной. Получено условие ограниченности весового частно-интегрального оператора в весовом пространстве Лебега* $L_p^\gamma(D)$ *, состоящего из функций* $f(x)$ *таких, что* $x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} f(x) \in L_p,\ \gamma_i > -1\ (i = 1, 2)$.

Ключевые слова: частный интеграл, весовой частно-интегральный оператор, анизотропное пространство функций, весовое анизотропное пространство функций.

WEIGHTED PRIVATE-INTEGRAL OPERATOR. BOUNDEDNESS

Trusova N.I.
Lipetsk State Pedagogical University named after P.P. Semenov-Tyan-Shansky, Lipetsk, Russia;
trusova.nat@gmail.com

We consider a weighted partial integral operator acting on functions defined on a finite rectangle $D = D_1 \times D_2 = (0, b_1) \times (0, b_2) \in \mathbb{R}_2$ *with respect to the second variable. A condition is obtained for the boundedness of a weighted partial integral operator in a weighted Lebesgue space* $L_p^\gamma(D)$ *, consisting of functions* $f(x)$ *such that* $x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} f(x) \in L_p,\ \gamma_i > -1\ (i = 1, 2)$.

Key words: partial integral, weighted partial integral operator, anisotropic function space, weighted anisotropic function space.

В статье решается задача, поставленная профессором Л.Н. Ляховым, которому автор выражает искреннюю благодарность.

В работе получено условие ограниченного действия весового частно-интегрального оператора в весовом анизотропном пространстве Лебега.

Частным интегралом называется интеграл, действующий по части переменных области определения функции. Пусть $D = D_1 \times D_2 = (0, b_1) \times (0, b_2)$ — конечный прямоугольник в $\mathbb{R}_2$. Рассмотрим весовой частно-интегральный оператор (сокращение *ВЧИ-оператор*), действующий по второй переменной. Такой ВЧИ-оператор имеет вид

$$(Ku)(x) = \int\limits_0^{b_2} k(x; t_2) u(x_1, t_2)\, t_2^{\gamma_2}\, dt_2, \qquad \gamma_2 > -1. \tag{1}$$

Используемая в данном выражении мера интегрирования введена в [1].

Исследование ВЧИ-оператора вида (1) привело к необходимости использовать весовое анизотропное пространство Лебега. Данное пространство обозначим $L_{\mathbf{r}}^{\gamma}(D)$ ($\mathbf{r} = (r_1, r_2)$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$), оно состоит из функций $f(x)$ с конечной нормой (см. [2])

$$\|f\|_{L_{\mathbf{r}}^{\gamma}(D)} = \left(\int\limits_{D_2} \left[\int\limits_{D_1} |f(x)|^{r_1} x_1^{\gamma_1}\, dx_1 \right]^{r_2/r_1} x_2^{\gamma_2}\, dx_2 \right)^{1/r_2} < \infty.$$

Пусть p и q — взаимно сопряженные числа, $1 \leqslant p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Применяя в (1) неравенство Гельдера, получим

$$|Ku| = \left| \int\limits_0^{b_2} k(x; t_2) u(x_1, t_2) t_2^{\gamma_2} dt_2 \right| \leq$$

$$\leq \left[\int\limits_0^{b_2} |k(x; t_2)|^q \; t_2^{\gamma_2} dt_2 \right]^{1/q} \left[\int\limits_0^{b_2} |u(x_1, t_2)|^p \; t_2^{\gamma_2} dt_2 \right]^{1/p} \leq$$

$$\leq \|k(x)\|_{L_q^{\gamma_2}(D_2)} \; \|u(x_1)\|_{L_p^{\gamma_2}(D_2)}.$$

Тогда норма функции в $L_p^{\gamma}(D)$ имеет вид

$$\|Ku\|_{L_p^{\gamma}} = \left[\int\limits_D \Big| \|k(x)\|_{L_q^{\gamma_2}(D_2)} \; \|u(x_1)\|_{L_p^{\gamma_2}(D_2)} \Big|^p \; x^{\gamma} dx \right]^{1/p},$$

где $x^\gamma dx = x_1^{\gamma_1} dx_1\, x_2^{\gamma_2} dx_2$. Выделим из полученного выражения переменную интегрирования x_2. Тогда

$$\|Ku\|_{L_p^\gamma} = \left[\int\limits_{D_2} \int\limits_{D_1} \|k(x)\|^p_{L_q^{\gamma_2}(D_2)} \, \|u(x_1)\|^p_{L_p^{\gamma_2}(D_2)} \, x_1^{\gamma_1} dx_1\, x_2^{\gamma_2} dx_2 \right]^{1/p}.$$

По переменной x_1 вновь применим неравенство Гельдера с теми же показателями p и q. Имеем

$$\|Ku\|_{L_p^\gamma} \leq \left[\int\limits_{D_2} \left(\int\limits_{D_1} \|k(x)\|^{pq}_{L_q^{\gamma_2}(D_2)} x_1^{\gamma_1} dx_1 \right)^{1/q} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\int\limits_{D_1} \|u(x_1)\|^{p^2}_{L_p^{\gamma_2}(D_2)} x_1^{\gamma_1} dx_1 \right)^{1/p} x_2^{\gamma_2} dx_2 \right]^{1/p} =$$

$$= \left[\int\limits_{D_2} \left(\int\limits_{D_1} \|k(x)\|^{pq}_{L_q^{\gamma_2}(D_2)} x_1^{\gamma_1} dx_1 \right)^{p/pq} x_2^{\gamma_2} dx_2 \right]^{1/p} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{D_1} \|u(x_1)\|^{p^2}_{L_p^{\gamma_2}(D_2)} x_1^{\gamma_1} dx_1 \right)^{1/p^2}.$$

Здесь обращаем внимание на то, что по разным переменным оказываются нормы, отвечающие различным показателям Гельдера. Именно, первый сомножитель устроен так: вначале $L_q^{\gamma_2}$ -норма взята по переменной t_2 по интервалу $(0, b_2)$. Соответствующую область интегрирования удобно обозначить D_{t_2}. Вторая норма уже берется (от первой нормы) по переменной $x_1 \in D_{x_1} = (0, b_1)$, но это уже $L_{pq}^{\gamma_1}$ -норма. Второй сомножитель устроен несколько по-другому. Вначале $L_p^{\gamma_2}$ -норма взята по переменной t_2 по интервалу D_{t_2}. Вторая норма уже берется (от первой нормы) по переменной $x_1 \in D_{x_1} = (0, b_1)$, но это уже $L_{p^2}^{\gamma_1}$ -норма. Используя указанные обозначения, запишем

$$\|Ku\|_{L_p^\gamma} \leq \left[\int\limits_{D_2} \|k(x_2)\|^p_{L^{(\gamma_2,\gamma_1)}_{(q;pq)}(D_{t_2;x_1})} \|u\|^p_{L^{(\gamma_2,\gamma_1)}_{(p,p^2)}(D_{t_2,x_1})} x_2^{\gamma_2} dx_2 \right]^{1/p} \leq$$

$$\leq \left[\int\limits_{D_2} \|k(x_2)\|^p_{L^{(\gamma_2,\gamma_1)}_{(q;pq)}(D_{t_2;x_1})} x_2^{\gamma_2} dx_2 \right]^{1/p} \|u\|_{L^{(\gamma_2,\gamma_1)}_{(p,p^2)}(D_{t_2,x_1})}.$$

В результате получена оценка

$$\|Ku\|_{L_p^\gamma} \leq C\|u\|_{L^{(\gamma_2,\gamma_1)}_{(p,p^2)}(D_{t_2,x_1})},$$

где

$$C = \|k\|_{L^{(\gamma_2,\gamma_1,\gamma_2)}_{(q;pq,p)}(D_{t_2;x_1,x_2})}.$$

В данной оценке через $L^{(\gamma_2,\gamma_1,\gamma_2)}_{(q;pq,p)}(D_{t_2;x_1,x_2})$ обозначено анизотропное лебегово пространство функций от аргумента (t_2, x_1, x_2), принадлежащего $D_{t_2} \times D$, а через $L^{(\gamma_2,\gamma_1)}_{(p,p^2)}(D_{t_2,x_1})$ обозначено анизотропное пространство функций $u = u(x_1, t_2)$, $(x_1, t_2) \in D_{x_1} \times D_{t_2}$.

При $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ соответствующие частные интегралы в анизотропных лебеговых классах изучались в работах [3], [4].

Таким образом, получен следующий результат.

Теорема. *Пусть* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p \in (1, \infty)$. *Если*

$$k(x_1, x_2, t_2) \in L^{(\gamma_2,\gamma_1,\gamma_2)}_{(q;pq,p)}(D_{t_2;x_1,x_2}), \quad u(x_1, t_2) \in L^{(\gamma_2,\gamma_1)}_{(p,p^2)}(D_{t_2,x_1}),$$

то ВЧИ-оператор вида (1) непрерывен из $L^{(\gamma_2,\gamma_1)}_{(p,p^2)}(D_{t_2,x_1})$ *в* $L_p^\gamma(D)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-41-480002).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляхов Л.Н., Санина Е.Л.* Оператор Киприянова—Бельтрами с отрицательной размерностью оператора Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B-гармонического уравнения //Дифференциалные уравнения. 2020, Т. 56, No. 12., С. 1610-1520.

2. *Бессов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. С. 478.

3. *Ляхов Л.Н., Иноземцев А.И., Трусова Н.И.* Об уравнениях Фредгольма с частными интегралами в $\mathbb{R}_2$ // Проблемы математического анализа. 2020. 107. С. 59-67.

4. *Ляхов Л.Н., Иноземцев А.И.* Частные интегралы в анизотропных классах Лебега. I: двумерный случай // Проблемы математического анализа. 2020. 102. С. 119-123.

УДК 517.95

ON A PROBLEM FOR TIME FRACTIONAL ALLER-LYKOV TYPE DIFFERENTIAL EQUATION ON A METRIC STAR GRAPH

Abdullaev O.Kh. [1,2] **, Djumaniyazova Kh.A.** [2]
[1] *V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;*
[2] *Toshkent financial institute, Tashkent, Uzbekistan;*
obidjon.mth@gmail.com, kuchkarova-91@mail.ru

This work devoted to study of an initial-boundary value problem the Aller-Lykov type fractional differential equation on the star metric graphs. Using method of separation of variables method, we find exact solution of the investigate problem. Eigenvalues and corresponding eigenfunctions are presented in a special case. Necessary class of given functions which provides an existence results for considered problem, are defined.

Key words: Fractional differential equation, Riemann-Liouville fractional derivatives, metric graph, initial-boundary value problem..

Consider a metric star graph $\Gamma = V \cup E$, consisting of a finite set of vertices (nodes) $V = V_i \cup O$ where $V_i = \{v_k\}_{k=1}^3$ is set of boundary vertices and at one point O , we call a set of interior vertices of the graph. Besides, a finite set of edges $E = \{B_k\}_{k=1}^3$ (such as heat conducting elements) connecting these nodes. The graph considered in this work is a metric graph [1].

We define coordinate x_k on the each bound B_k of the graph with isometric mapping it to the line intervals $(0, L)$ such that $L < \infty$, $(k = 1.2.3)$ .We consider the following time fractional Aller-Lykov type equation

$$\beta \cdot D_{0t}^{\alpha} u^{(k)}(x,t) + D_{0t}^{\alpha-1} u^{(k)}(x,t) = u_{xx}^{(k)}(x,t) - f^{(k)}(x,t) \qquad (1)$$

on the each edges ($B_k\{\, x_k : 0 \le x \le l \,\}$) of the over defined metric graph, where $1 < \alpha < 2$, $c = const > 0$, $f^{(k)}(x,t)$ are known functions and $D_{ax}^{\alpha}f$ is the Riemann-Liouville fractional derivatives [2]

$$\left(D_{ax}^{\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int\limits_{a}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt, n=[\alpha]+1, \alpha>0, x>a.$$

Problem To find a solution $u^{(k)}(x,t)$ of the equation (1) in domain $B_k\times(0,T)$, with the following conditions:

1. solution $u^{(k)}(x,t)$ belongs to the class:

$$u^{(k)}(x,t)\in C\left([0,L]\times(0,T]\right)$$

$$u_{xx}^{(k)}(x,t), D_{0t}^{\alpha-1}u^{(k)}(x,t)\in C\left((0,L)\times(0,T)\right).$$

2. takes places initial-boundary and gluing conditions:

$$\lim_{t\to0}D_{0t}^{\alpha-2}u^{(k)}(x,t)=\tau^{(k)}(x),\ \lim_{t\to0}D_{0t}^{\alpha-1}u^{(k)}(x,t)=\nu^{(k)}(x)\ ; \quad (2)$$

$$u^{(1)}(0,\mathrm{t})=u^{(2)}(0,t)=u^{(3)}(0,t),\ t\in[0,T]; \quad (3)$$

$$u_x^{(1)}(0,t)+u_x^{(2)}(0,t)+u_x^{(3)}(0,t)=0,\ t\in(0,T); \quad (4)$$

$$u^{(k)}(L,t)=0,\ t\in[0,T],\ k=1,2,3 \quad (5)$$

where $\tau^{(k)}(x)$ and $\nu^{(k)}(x)$ are sufficiently smooth functions, besides $\tau^{(k)}(L)=0$.

Using by the separate variables method for the homogeneous equation we will get ODE integer order:

$$\frac{d^2}{dx^2}X^{(k)}(x)+\lambda^2X^{(k)}(x)=0, \lambda\in R\backslash\{0\},\ k=1,2,3 \quad (6)$$

and ODE fractional order

$$\beta D_{0t}^{\alpha}T(t)+D_{0t}^{\alpha-1}T(t)+\lambda^2T(t)=0,\ 1<\alpha<2 \quad (7)$$

moreover, from the conditions (3)-(5), we receive

$$X^{(1)}(0)=X^{(2)}(0)=X^{(3)}(0), \quad (8)$$

$$\frac{d}{dx}X^{(1)}(0)+\frac{d}{dx}X^{(2)}(0)+\frac{d}{dx}X^{(3)}(0)=0, \quad (9)$$

$$X^{(k)}\left(L_k\right)=0,\ k=1,2,3. \tag{10}$$

Using by conditions (11)-(13) and assuming $L_1=L_2=L_3=L$ from the general solution

$$X^{(k)}(x)=a_k\cos\lambda x+b_k\sin\lambda x;\ x\in B_k$$

of the Eq. (9), we can find eigenvalues as $\lambda_{1,n}=\lambda_{2,n}=\frac{\pi n}{L}$, $\lambda_{3,n}=\frac{(2n-1)\pi}{2L}$, $n\in N$ (see [3]). The orthonormal eigenfunctions for these eigenvalues can be found by the following representation:

$$f\left(x\right)=\begin{pmatrix} f_1\left(x_1\right)\\ f_2\left(x_2\right)\\ f_3\left(x_3\right)\end{pmatrix},\ g\left(x\right)=\begin{pmatrix} g_1\left(x_1\right)\\ g_2\left(x_2\right)\\ g_3\left(x_3\right)\end{pmatrix}.$$

Notice, that the scalar multiplication and norm for those functions, we will define, respectively as:

$$\left(f\left(x\right),g\left(x\right)\right)_\Gamma=\sum_{k=1}^{3}\int\limits_0^{L_j} f_j\left(x_j\right)g_j\left(x_j\right)dx_j$$

and

$$\|f_j\|_\Gamma^2=\left(f_j,f_j\right)_\Gamma$$

Here $(\cdot)_\Gamma=(\cdot)_{L_2[0;L_k]}$ is understood in the sense. Orthonormal eigenfunctions for the corresponding eigenvalues have a forms [3] :

$$X_n^{(1)}(x)=\frac{1}{\sqrt{L}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\sin\frac{\pi n}{L}x, \tag{11}$$

$$X_n^{(2)}(x)=\frac{1}{\sqrt{3L}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\sin\frac{\pi n}{L}x\ , \tag{12}$$

$$X_n^{(3)}(x)=\frac{2}{\sqrt{6L}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}cos\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\ . \tag{13}$$

Well known, that a solution of the Eq.(10) will be represented on the form [4]:

$$T_n(t)+\int\limits_0^t T_n(\tau)\left[a+\frac{b}{\Gamma(\alpha)(t-\alpha)^{1-\alpha}}\right]d\tau=f_n(t) \tag{14}$$

where $a = \frac{1}{\beta}$, $b = \frac{\lambda^2}{\beta}$, $f_n(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(\nu_n + a\tau_n) + \frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\tau_n$.

Easy to spot, that the solution of Eq. (14), has a form [4]

$$T_{in}(t) = f_n(t) - \int_0^t R(t,\tau,\lambda_{i+1}) f_n\,(t)\,d\tau =$$

$$= (\nu_n + a\tau_n)\left[\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\sum_{s=0}^{n+1}\begin{pmatrix} n+1 \\ s \end{pmatrix}\frac{a^{n+1-s}{b_i}^s t^{n+s(\alpha-1)+\alpha}}{\Gamma(n+s(\alpha-1)+\alpha+1)}\right] +$$

$$+\tau_n\left[\frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\sum_{s=0}^{n+1}\begin{pmatrix} n+1 \\ s \end{pmatrix}\frac{a^{n+1-s}{b_i}^s t^{n+s(\alpha-1)+\alpha-1}}{\Gamma(n+s(\alpha-1)+\alpha)}\right] \tag{15}$$

where $\begin{pmatrix} n+1 \\ s \end{pmatrix} = \frac{(n+1)!}{s!(n+1-s)!}$.

Hence, taking into account (14) - (13) and (15) solution of the investigate problem we will present, as

$$u\,(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{C_1}{\sqrt{L}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} +\right.$$

$$\left. + \frac{C_2}{\sqrt{3L}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\sin\frac{\pi n}{L}x\right] T_{1n}\,(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2C_3}{\sqrt{6L}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L} T_{2n}\,(t) \tag{16}$$

where $T_n(t) = \nu_{in} A_i\,(t) + \tau_{in}\,(aA_i\,(t) + B_i\,(t))$,

$$A_i\,(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\sum_{s=0}^{n+1}\begin{pmatrix} n+1 \\ s \end{pmatrix}\frac{a^{n+1-s}{b_{in}}^s t^{n+s(\alpha-1)+\alpha}}{\Gamma(n+s(\alpha-1)+\alpha+1)}; \tag{17}$$

$$B_i\,(t) = \frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\sum_{s=0}^{n+1}\begin{pmatrix} n+1 \\ s \end{pmatrix}\frac{a^{n+1-s}{b_{in}}^s t^{n+s(\alpha-1)+\alpha-1}}{\Gamma(n+s(\alpha-1)+\alpha)}; \tag{18}$$

$$b_{1n} = \frac{1}{\beta}\cdot\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\; b_{2n} = \frac{1}{\beta}\cdot\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right)^2.$$

We assume, that (see (2))

$$\tau^{(k)}(x) = \begin{pmatrix} \tau^{(1)}(x) \\ \tau^{(2)}(x) \\ \tau^{(3)}(x) \end{pmatrix}; \ \nu^{(k)}(x) = \begin{pmatrix} \nu^{(1)}(x) \\ \nu^{(2)}(x) \\ \nu^{(3)}(x) \end{pmatrix},$$

than using bay condition (2), considering (17) and (18), from the solution (16) we can find unknown Fourier coefficients

$$C_{1n}^{*} = C_{1n}\tau_{1n}; \ C_{2n}^{*} = C_{2n}\tau_{1n}; \ C_{3n}^{*} = C_{3n}\tau_{2n};$$

$$C_{4n}^{*} = C_{1n}\nu_{1n}; \ C_{5n}^{*} = C_{2n}\nu_{1n}; \ C_{6n}^{*} = C_{3n}\nu_{2n}.$$

Hence, unique solution of the investigated problems has form:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{C_{1n}^{*}}{\sqrt{L}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{C_{2n}^{*}}{\sqrt{3L}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)\sin\frac{\pi n}{L}x\left(aA_1(x) + B_1(t)\right) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{C_{4n}^{*}}{\sqrt{L}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{C_{5n}^{*}}{\sqrt{3L}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)\sin\frac{\pi n}{L}xA_{1n}(x) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2C_{3n}^{*}}{\sqrt{6L}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\left(aA_{2n}(x) + B_{2n}(t)\right) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2C_{6n}^{*}}{\sqrt{6L}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L}A_{2n}(t).$$

.

BIBLIOGRAPHY

1. *A.Belarbi, M.Benchohra, A. Ouahab* Uniqueness results for fractional functional differential equations with infinity delay in Frechet spaces, // Appl. Anal., vol. 85, no. 12, (2006), pp. 1459 - 1470.
2. *A.A Kilbas, H.M Srivstava, J.J Trujillo.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations, .// in: North-Holland Mathematics Studies, Vol. 204, Elsevier Science. B.V., Amsterdam. (2006)
3. *Abdullaev O.Kh, Khujakulov J.R.* On a problem for the time-fractional diffusion equation on a metric graphs. Uzbek Mathematical Journal.

No.4, 3-12 (2017).
4. *Gekkieva S. Kh., Kerefov M. A.* The boundary value problem for the generalized moisture transfer equation. // Vestnik KRAUNC. Fiz – mat. nauki. 2018. в,,– 1(18). pp. 21-31.

УДК 517.956

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Азизов М.С.
Ферганский государственный университет, г. Фергана, Узбекистан; muzaffar.azizov.1988@mail.ru

В данной работе в прямоугольнике поставлена краевая задача для нагруженного дифференциального уравнения четвертого порядка с сингулярным коэффициентом и доказана теорема о единственности решения поставленной.

Ключевые слова: нагруженное дифференциальное уравнение, сингулярный коэффициент, единственность решения.

ON THE UNIQUENESS OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A LOADED DIFFERENTIAL EQUATION OF THE FOURTH ORDER WITH A SINGULAR COEFFICIENT

Azizov M.S.
Fergana State University, Fergana, Uzbekistan; muzaffar.azizov.1988@mail.ru

In the present work in a rectangle a boundary value problem for a loaded differential equation of the fourth order with a singular coefficient has been formulated and the theorem on the uniqueness of the considered problem has been proved.

Key words: loaded differential equation, singular coefficient, uniqueness of the solution.

В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < p,\, 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xxxx} + u_{tt} + \frac{2\gamma}{t}u_t = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j u\left(x, t_j\right) + f\left(x,t\right), \tag{1}$$

где $f(x,t)$ - заданная функция, $u = u(x,t)$ - неизвестная функция, p , T , α_j , t_j , $j = \overline{1,m}$ - заданные действительные числа, причем $t_j \in (0,T]$, $j = \overline{1,m}$; $t_j \neq t_l$, $j \neq l$, $j,l = \overline{1,m}$; $p > 0$, $T > 0$, $\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j^2 \neq 0$.

Задача. Найти функцию $u(x,t) \in C_{x,t}^{2,0}\left(\bar{\Omega}\right) \cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega)$, удовлетворящую уравнению (1) в области Ω и следующим начальным

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad \lim_{t\to 0} t^{2\gamma} u_t(x,t) = \varphi_2(x), \quad 0 < x < p \tag{2}$$

и краевым условиям

$$u(0,t) = 0,\; u(p,t) = 0,\; u_{xx}(0,t) = 0,\; u_{xx}(p,t) = 0,\; 0 \le t \le T, \tag{3}$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ - заданные функции.

Теорема 1. Если для $\forall n \in N$ справедливо неравенство $\Delta = 1 - \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j \left[\frac{2}{\lambda_n^4} - \frac{\pi}{2\cos\gamma\pi} \frac{t_j^{1/2\,-\gamma}}{\Gamma(1/2\,-\gamma)} \left(\frac{2}{\lambda_n^2}\right)^{3/2\,+\gamma} J_{\gamma-1/2}\,\left(\lambda_n^2 t_j\right) \right] \neq 0$, то поставленная задача не может иметь более одного решения, где $\lambda_n = n\pi/p$.

Доказательство. Предположим, что поставленная задача имеет два решения: $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Тогда функция

$$u_1(x,t) - u_2(x,t) = v(x,t) \tag{4}$$

в области Ω удовлетворяет уравнению

$$Lv = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j v\left(x, t_j\right), \tag{5}$$

условию (3) и однородную краевую условию

$$v(x,0) = 0, \quad \lim_{t\to 0} t^{2\gamma} v_t(x,t) = 0, \quad 0 \le x \le p. \tag{6}$$

Известно, что следующая функция

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{p}}\sin\lambda_n x, \quad n \in N \tag{7}$$

в $L_2(0,p)$ образуют полную ортонормированную систему [1].

Следуя [2, 3] рассмотрим функцию:

$$g_n(t) = \int\limits_0^p v(x,t)\, X_n(x)\, dx, \quad n \in N. \tag{8}$$

Согласно (8) введем функции

$$g_{n,\varepsilon}(t) = \int\limits_{\varepsilon}^{p-\varepsilon} v(x,t)\, X_n(x)\, dx, \quad 0 < \varepsilon < p, \quad n \in N. \tag{9}$$

Очевидно, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} g_{n\,,\varepsilon}(t) = g_n(t)\,,\ t \in [0,T]\,.$

Дифференцируя равенство (9) два раза, и учитывая уравнение (5), после некоторых преобразований, имеем

$$g''_{n\,,\varepsilon}(t) + \frac{2\gamma}{t} g'_{n\,,\varepsilon}(t) - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j g_{n\,,\varepsilon}(t_j) =$$

$$= -\int\limits_{\varepsilon}^{p-\varepsilon} v_{xxxx}(x,t)\, X_n(x)\, dx, \quad n \in N. \tag{10}$$

Применяя правило интегрирования по частям четыре раза к интегралу в правой части (10), получим

$$g''_{n\,,\varepsilon}(t) + \frac{2\gamma}{t} g'_{n\,,\varepsilon}(t) - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j g_{n\,,\varepsilon}(t_j) =$$

$$= -\left[X_n(p-\varepsilon)\, v_{xxx}(p-\varepsilon,t) - X_n(\varepsilon)\, v_{xxx}(\varepsilon,t)\right] +$$

$$+\lambda_n \left[X'_n(p-\varepsilon)\, v_{xx}(p-\varepsilon,t) - X'_n(\varepsilon)\, v_{xx}(\varepsilon,t)\right] +$$

$$+\lambda_n^2 \left[X''_n(p-\varepsilon)\, v_x(p-\varepsilon,t) - X''_n(\varepsilon)\, v_x(\varepsilon,t)\right] -$$

$$-\lambda_n^3 \left[X'''_n(p-\varepsilon)\, v(p-\varepsilon,t) - X'''_n(\varepsilon)\, v(\varepsilon,t)\right] -$$

$$-\lambda_n^4 \int\limits_{\varepsilon}^{p-\varepsilon} v(x,t) X_n(x)\, dx, \quad n \in N.$$

Отсюда, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ и учитывая однородные граничные условия (4), а также свойства функций $X_n(x)$, имеем

$$g''_{n,\varepsilon}(t) + \frac{2\gamma}{t} g'_{n,\varepsilon}(t) - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j g_{n,\varepsilon}(t_j) = -\lambda_n^4 \int_0^p u(x,t) X_n(x)\, dx.$$

Принимая во внимание обозначение (8) из последнего равенства получим обыкновенное дифференциальное уравнение в виде

$$g''_n(t) + \frac{2\gamma}{t} g'_n(t) + \lambda_n^4 g_n(t) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j g_n(t_j), \quad n \in N. \tag{11}$$

Общее решение уравнения (11) определяется в виде

$$g_n(t) = t^{1/2-\gamma} \left[C_{1n} J_{\gamma-1/2}\left(\lambda_n^2 t\right) + C_{2n} J_{1/2-\gamma}\left(\lambda_n^2 t\right) \right] + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j g_n(t_j) \times$$

$$\times \left[\frac{2}{\lambda_n^4} - \frac{\pi}{2\cos\gamma\pi} \frac{t^{1/2-\gamma}}{\Gamma(1/2-\gamma)} \left(\frac{2}{\lambda_n^2}\right)^{3/2+\gamma} J_{\gamma-1/2}\left(\lambda_n^2 t\right) \right], \ n \in N. \tag{12}$$

где C_{1n} и C_{2n} - произвольные постоянные.

Кроме того из (12), в силу однородных начальных условий (6), следует следующие условия $g_n(0) = 0$, $g'_n(0) = 0$, $n \in N$. Подставляя (12) в этих условий, получим $C_{1n} = 0$, $C_{2n} = 0$, $n \in N$.

Если учесть это, то (12) упрощается и принимает вид

$$g_n(t) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j g_n(t_j) \times$$

$$\times \left[\frac{2}{\lambda_n^4} - \frac{\pi}{2\cos\gamma\pi} \frac{t^{1/2-\gamma}}{\Gamma(1/2-\gamma)} \left(\frac{2}{\lambda_n^2}\right)^{3/2+\gamma} J_{\gamma-1/2}\left(\lambda_n^2 t\right) \right], \ n \in N. \tag{13}$$

Теперь, переходим к нахождению $g_n(t_j)$ из (13). С этой целью в (13) положив $t = t_j$, $j = \overline{1,m}$ получим следующую однородную линейную систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (1 - A_1) g_n(t_1) - A_1 g_n(t_2) - ... - A_1 g_n(t_m) = 0, \\ -A_2 g_n(t_1) + (1 - A_2) g_n(t_2) - ... - A_2 g_n(t_m) = 0, \\ . \\ -A_m g_n(t_1) - A_m g_n(t_2) - ... + (1 - A_m) g_n(t_m) = 0, \end{cases} \tag{14}$$

где $A_j = \alpha_j \left[\frac{2}{\lambda_n^4} - \frac{\pi}{2\cos\gamma\pi} \frac{t_j^{1/2-\gamma}}{\Gamma(1/2-\gamma)} \left(\frac{2}{\lambda_n^2}\right)^{3/2+\gamma} J_{\gamma-1/2}\left(\lambda_n^2 t_j\right) \right]$.

Основной детерминант системы (14) имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-A_1 & -A_1 & ... & -A_1 \\ -A_2 & 1-A_2 & ... & -A_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -A_m & -A_m & ... & 1-A_m \end{vmatrix} = 1 - \sum_{j=1}^{m} A_j \neq 0.$$

Так как, согласно условию теоремы 1, $\Delta \neq 0$, то система уравнений (14) имеет только тривиальное решение.

На основании изложенного выше, из (13) следует, что $g_n(t) = 0$, $t \in [0,T]$, $n \in N$. На основании этого, из равенство (8) вытекает, что $\int\limits_0^p v(x,t) X_n(x)\,dx = 0$, $n \in N$. Отсюда, в силу полноты системы функций (7), получим $v(x,t) \equiv 0$. Тогда из равенства (5) следует, что $u_1(x,t) = u_2(x,t)$, что и требовалось доказать. Теорема 1 доказана.

Замечание. Множество чисел $t_j \in (0,T]$, $j = \overline{0,m}$ и p, удовлетворяющих неравенство $\Delta > \delta$ не пусто. Полагая $\alpha_j = 1$, $j = \overline{1,m}$ можно найти число δ, удовлетворяющего неравенство $\Delta > \delta$, $\forall n \in N$.

Например, если положим $\alpha_j = 1$, $j = \overline{1,m}$, то

$$|\Delta| = \left| 1 - \sum_{j=1}^{m} A_j \right| =$$

$$= \left| 1 - \sum_{j=1}^{m} \left[\frac{2}{\lambda_n^4} - \frac{\pi}{2\cos\gamma\pi} \frac{t_j^{1/2-\gamma}}{\Gamma(1/2-\gamma)} \left(\frac{2}{\lambda_n^2}\right)^{3/2+\gamma} J_{\gamma-1/2}\left(\lambda_n^2 t_j\right) \right] \right| \geq$$

$$= 1 - \left| \sum_{j=1}^{m} \left[\frac{2}{\lambda_n^4} - \frac{2}{\lambda_n^4} \bar{J}_{\gamma-1/2}\left(\lambda_n^2 t_j\right) \right] \right| \geq 1 - \frac{4}{\lambda_n^4} m = 1 - 4\left(\frac{p}{n\pi}\right)^4 m \geq$$

$$\geq 1 - 4(p/\pi)^4 m \geq \delta > 0.$$

Следовательно, если число p удовлетворяет неравенство, $1 - 4(p/\pi)^4 m > 0$, то в качестве δ можно взять числу $\delta = 1 - 4m(p/\pi)^4$.

Задача такого типа при $\gamma = 0$ исследована в работах [2 – 4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. ч. 2, -Москва: Наука, 1973. -448 с.

2. *Сабитов К.Б.* Колебания балки с заделанными концами // Вестник Самарского го- сударственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2015. Т. 19. № 2 (39). С. 311–324.

3. *Сабитов К.Б.* К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок // Дифференц. уравнения. 2017. Т.53. № 1. С. 89–100.

4. *Urinov A.K. and Azizov M.S.* A Boundary Problem for the Loaded Partial Differential Equations of Fourth Order // Lobachevskii Journal of Mathematics, -2021. -№ 3. Vol. 42, pp. 621–631.

УДК 519.624

ИССЛЕДОВАНИЕ КЛАССА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МНОГОТОЧЕЧНЫМИ И ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Айда-заде К.Р. [1,2] **, Абдуллаев В.М.** [1,3]

[1] *Институт Систем Управления НАНА, г. Баку, Азербайджан;*

[2] *Институт Математики и Механики НАНА, г. Баку, Азербайджан;*

[3] *Азербайджанский Государственный Университет Нефти и Промышленности, г. Баку, Азербайджан;*

kamil_aydazade@rambler.ru , vaqif_ab@rambler.ru

Исследуется линейная система интегро-дифференциальных уравнений с обыкновенными производными с нелокальными условиями. Нелокальные условия включают точечные и интегральные значения неизвестных функций. Ядра интегральных слагаемых в уравнениях зависят лишь от одной переменной интегрирования. Получены необходимые и достаточные условия существования и единственности решения задачи. Приводится решение иллюстративной задачи.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, нагруженное уравнение, нелокальное условие, существование единственного решения.

STUDY OF CLASS OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONDITIONS WITH MULTIPOINT AND INTEGRAL VALUES

Aida-zade K.R. [1,2] **, Abdullayev V.M.** [1,3]
[1] *Institute of Control Systems of ANAS, Baku, Azerbaijan;*
[2] *Institute of Mathematics and Mechanics of ANAS, Baku, Azerbaijan;*
[3] *Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan;*
kamil_aydazade@rambler.ru , vaqif_ab@rambler.ru

A linear system of integro-differential equations with ordinary derivatives and with non-local conditions is investigated. Non-local conditions include point and interval values of unknown functions. The kernels of the integral terms depend on only one variable of integration in the equations. Necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution to the problem are obtained. A solution to an illustrative problem is presented.

Key words: integro-differential equation, loaded equation, non-local condition, existence of unique solution.

Исследуется следующая задача:

$$\frac{du(x)}{dx} = D^0(x)u(x) + \sum_{i=1}^{L_0} C^i(t) \int\limits_{\bar{x}_{i1}}^{\bar{x}_{i2}} D^i(y)u(y)dy + E(x),\ x \in [a,b], \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{L_1} A^j u(\breve{x}_j) + \sum_{k=1}^{L_2} \int\limits_{\widehat{x}_{k1}}^{\widehat{x}_{k2}} B^k(y)u(y)dy = G. \quad (2)$$

Здесь: $u(x)$ –неизвестная n-мерная непрерывно дифференцируемая вектор функция при $x \in [a,b]$; n-мерная вектор-функция $E(x)$ и $(n \times n)$ квадратные непрерывные матричные функции $D^0(x)$, $C^i(x)$, $D^i(x)$, и при $x \in [a,b]$, $i = 1,2,...,L_0$,и $B^k(x)$ при $x \in [\hat{x}_{k1}, \hat{x}_{k2}]$, $k = 1,2,...,L_2$,–заданы; постоянные n-мерные квадратные матрицы A^j и вектор G, точки из $[a,b] : \bar{x}_{i1}, \bar{x}_{i2}, \breve{x}_j, \hat{x}_{k1}, \hat{x}_{k2}$ такие, что $\bar{x}_{i1} < \bar{x}_{i2}$, $\hat{x}_{k1} < \hat{x}_{k2}$, $\breve{x}_j < \breve{x}_{j-1}$, $x_1 = a$, $x_{L_1} = b$, $i = 1,2,...,L_0, j = 1,2,...,L_1, k = 1,2,...,L_2$ –заданы.

Система интегро-дифференциальных уравнений специфична тем, что ядра интегральных членов зависят лишь от одной переменной интегрирования. Задача вида (1), (4) возникает, например, в задачах управления с обратной связью, когда замеры состояния имеют как интегральный, так и точечный характер [1–3].

Известно, что введением новых неизвестных переменных в каждом из отрезков, получаемых разбиением отрезка $[a, b]$ на отрезки, определяемые точками $\bar{x}_{i1}, \bar{x}_{i2}, \breve{x}_j, \hat{x}_{k1}, \hat{x}_{k2}$, задачу (1), (4) можно привести к точечно нагруженной системе дифференциальных уравнений с разделенными условиями. При этом порядок получаемой системы дифференциальных уравнений будет равен $n(L_1 + L_2)(L_0 + L_2 + 1)$. Такое повышение порядка системы при исследовании как самой задачи (1), (4), а также смежных задач, приводящих к решению задачи вида (1), (4) делает этот подход с приведением исходной задачи не эффективном. Поэтому в данной работе излагается способ исследования задачи (1), (4), не использующий увеличения порядка исходной задачи.

Рассмотрим следующую вспомогательную относительно (1) систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\vartheta(x)}{dx} = D^0(x)\vartheta(x) + E(x), \; x \in [a, b]\,. \tag{3}$$

Пусть $F(x, \xi)$ является фундаментальной матрицей решений однородной относительно (5) системы, т. е.

$$\frac{dF(x,\xi)}{dx} = D^0(x)F(x,\xi), \; F(\xi,\xi) = I_n, \; (x,\xi) \in [a, \, b]\,, \tag{4}$$

где $I_n - n$-мерная единичная матрица.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия на функции и параметры задачи (1), (4), приведенные в постановке задачи. Тогда для существования единственного решения задачи (5), (4) необходимо и достаточно, чтоб ранг n-мерной квадратной матрицы*

$$M_1 = \sum_{j=1}^{L_1} A^j F(\breve{x}_j, a) + \sum_{k=1}^{L_2} \int\limits_{\widehat{x}_{k1}}^{\widehat{x}_{k2}} B^k(y)F(y,a)dy,$$

был равен n.

Теоремы 2. *Пусть выполнены условия, приведенные в теореме 1. Для того, чтобы задача (1), (4) имела единственное решение необходимо и достаточно, чтобы ранг квадратной nL_0-мерной матрицы*

$$M_2 = \left(\delta_{ij} I_n - \int\limits_{\bar{x}_{i1}}^{\bar{x}_{i2}} D^i(y) U^j(y) dy \right)_{i,j=1}^{L_0}$$

был равен nL_0 *. Здесь* n *-мерные квадратные матрицы* $U^j(x)$ *являются решениями систем дифференциальных уравнений:*

$$\frac{dU^j(x)}{dx} = D^0(x) U^j(x) + C^j(x), \ x \in [a, b], \tag{5}$$

и удовлетворяют условиям

$$\sum_{j=1}^{L_1} A^j U^j(\breve{x}_j) + \sum_{k=1}^{L_2} \int\limits_{\widehat{x}_{k1}}^{\widehat{x}_{k2}} B^k(y) U^k(y) dy = 0_{n \times n}. \tag{6}$$

Теоремы 3. *Решение задача (1), (2) имеет приставление, причем единственное в виде*

$$u(x) = \vartheta(x) + \sum_{i=1}^{L_0} U^i(t) \int\limits_{\bar{x}_{i1}}^{\bar{x}_{i2}} D^i(y) u(y) dy, \tag{7}$$

где $\vartheta(x)$*–есть решение системы (3) с условиями вида (2),* $U^i(t)$ *,* $i = 1, 2, ..., L_0$ *– решения задача (5), (6).*

Из этой теоремы имеем конструктивный подход к решению задачи (1),(2), выключающий решение вспомогательных задач по определению функций $\vartheta(x)$, $U^i(t)$, $i = 1, 2, ..., L_0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А.М.*Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 272 с.

2. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.*Оптимизация размещения точек контроля при синтезе управления процессом нагрева // Автоматика и Телемеханика. 2017. Т. 78. № 9. С. 49–66.

3. *Айда-заде К.Р., Гашимов В.А.*Синтез локально сосредоточенных управлений стабилизацией мембраны с оптимизацией размещения точек контроля и гасителей колебаний // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 7. С. 1126–1142.

УДК 517.956.6

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С УСЛОВИЕМ ГЕЛЛЕРСТЕДТА НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧИКАХ ДЛЯ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Амонов Б.Б., Хуррамов Н.Х.
Термезкий государственный университет, г. Термез, Узбекистан; amonovbobur91@mail.ru, nxurramov22@mail.ru

Для уравнения $(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0$, *рассматриваемого в некоторой смешанной области, доказаны теорема единственности решения задачи с условиями Геллерстедта на части граничной характеристики и на параллельной ей внутренней характеристике.*

Ключевые слова: сингулярный коэффициент, внутренная характеристика,принцип экстремума, единственность решения.

UNIQUENESS PROBLEM WITH GELLERSTEDT CONDITIONS ON PARALLEL CHARACTERISTICS FOR ONE SPECIAL DOMAIN

Amonov B.B., Khurramov N.Kh.
Termez State University of the Republic of Uzbekistan, Termez; amonovbobur91@mail.ru, nxurramov22@mail.ru

For the equation $(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0$, *considered in a certain mixed domain, the uniqueness theorem for the solution of the problem with the Gellerstedt conditions on a part of the boundary characteristic and on the internal characteristic parallel to it is proved.*

Key words: singular coefficient, internal characteristics,extremum prin-ciple, uniqueness of solution.

I. **Постановка задачи** Г. Пусть D_a- область ограниченная отрезком OB оси Oy, $0 \leq y \leq ((m+2)a/2)^{2/(m+2)}$, дугой AB нормальной кривой $\sigma_a : x^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} = a^2$, $x \geq 0, y \geq 0$, здесь $O = O(0,0)$, $A = A(a,0)$, $B = B(0,b)$ и характеристиками

$$OC : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 0 \quad \text{и} \quad AC : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = a$$

уравнения
$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{1}$$
где постоянная $m > 0$.

Обозначим через D_a^+ и D_a^- части области D_a, лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через C_0 и C_1 точка пересечения характеристик OC и AC с характеристиками уравнения (1), выходящих из точки $E(c, 0)$, где c - некоторое число, принадлежащее интервалу $I = (0, a)$ оси $y = 0$.

С. Геллерстедт [1, с.186, с.201] для обобщенного уравнения Ф.Трикоми исследовал задачи, при постановке которых в гиперболической части области D_a^- значения искомого решения задается на двух кусках характеристик разного семейства: EC_0 и EC_1 или OC_0 и AC_1 . При этом в эллиптической части области задаются условие Дирихле. Настоящая работа отличается от задачи Геллерстедта тем, что здесь в условиях задачи значения искомого решения задаются на характеристиках одного семейства т.е на граничной характеристике OC_0 и параллельной ей внутренней характеристике EC_1 , а условие Дирихле задается на нормальной кривой σ_a и на отрезка OB оси $x = 0$.

Задача Г . Требуется найти в области D_a функцию $u(x, y) \in C\left(\overline{D}_a\right)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) функция $u(x, y)$ принадлежит $C^2\left(D_a^+\right)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области D_a^+ ;

2) функция $u(x, y)$ является в области D_a^- обобщенным решением класса $R_1[1, c.104]$;

3) на интервале вырождения OA имеет место условие сопряжения
$$\lim_{y\to -0} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to +0} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in (0, a), \tag{2}$$
причём эти пределы при $x \to 0$, $x \to a$ могут иметь особенности порядка меньше $1 - 2\beta$, $\beta = m/2(m + 2) \in (0, 1/2)$.

4) для любых $x \in \overline{I}$ выполняются равенства
$$u(x, y)\,|_{\sigma_0 \cup OB} = \varphi(s), \quad s \in [0, a], \tag{3}$$
$$u(x, y)\,|_{OC_0} = \psi_0(x), \quad x \in [0, c/2], \tag{4}$$
$$u(x, y)\,|_{EC_1} = \psi_1(x), \quad x \in [c, (c + a)/2], \tag{5}$$

Заметим, что условие (3) является условием Дирихле, заданное на $\sigma_0 \cup OB$ а условия (4) и (5) есть соответственно условие Геллерстедта заданное на граничной характеристике OC_0 и на внутренней характеристике EC_1 . При $c = 0$ или $c = a$ из задачи Γ следует задача Трикоми $[1, c.128]$.

2. Единственность решения задачи Γ . Решение задачи Коши с начальными данными

$$u(x,0) = \tau(x),\ 0 \le x \le a;\ \lim_{y\to -0}\frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x),\ 0 < x < a,$$

для уравнения (1) в области D_a^- а задаётся формулой Дарбу

$$u(x,y) = \gamma_1 \int_0^a \tau\left[x + \frac{2(2t-a)}{a(m+2)}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right] t^{\beta-1}(a-t)^{\beta-1}dt+$$

$$+\gamma_2 \cdot y \int_0^a \nu\left[x + \frac{2(2t-a)}{a(m+2)}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right] t^{-\beta}(a-t)^{-\beta}dt, \tag{6}$$

где

$$\gamma_1 = \frac{a^{1-2\beta}\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)},\ \gamma_2 = -\frac{a^{2\beta-1}\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}.$$

С помощью формулы Дарбу (6) из краевых условий (4) и (5) нетрудно получить соотношения

$$\nu(x) = \gamma D_{0,x}^{1-2\beta}\tau(x) + \widetilde{\psi}_0(x), \quad x \in (0,c), \tag{7}$$

и

$$\nu(x) = \gamma D_{c,x}^{1-2\beta}\tau(x) + \widetilde{\psi}_1(x), \quad x \in (c,a), \tag{8}$$

соответственно, где $D_{0,x}^{1-2\beta}$ и $D_{c,x}^{1-2\beta}-$ операторы дифференцирования дробного порядка [2],

$$\gamma = \frac{2\Gamma(2\beta)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-2\beta)}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{2\beta},\quad \widetilde{\psi}_0(x) = -\gamma\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)}x^\beta D_{0,x}^{1-\beta}\psi_0\left(\frac{x}{2}\right),$$

$$\widetilde{\psi}_1(x) = -\gamma\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)}(x-c)^\beta D_{c,x}^{1-\beta}\psi_1\left(\frac{x+c}{2}\right)$$

Соотношения (7) и (8) являются первыми функциональными соотношениями между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесенными соответсвенно на интервалы $(0,c)$ и (c,a) оси $y = 0$ из области D_a^- .

Для задачи Γ аналогом принципа экстремума А.В.Бицадзе $[3, c.301]$ является

Теорема 1.*Решение* $u(x,y)$ *задачи* Γ *при выполнении условий* $\psi_0(x)\equiv 0,\ \psi_1(x)\equiv 0$ *своего наибольшего положительного значения (НПЗ) или наименьшего отрицательного значения (НОЗ) в замкнутой области* $\overline{D}_a^+$ *может принимать только в точках* $\sigma_0\cup OB$.

Доказательство. Пусть функция $u(x,y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и $u(x,y)\neq 0$ в точках области $\overline{D}_a^+$. Тогда в $\overline{D}_a^+$ она достигает своего наибольшего положительного значения (НПЗ)или наименьшего отрицательного значения (НОЗ). В силу принципа Хопфа $[3, c.25]$ решение $u(x,y)$ уравнения (1)своего НПЗ во внутренних точках области $\overline{D}_a^+$ не достигает.

Пусть решение $u(x,y)$ своего НПЗ достигает во внутренней точке x_0 интервала I. Здесь возможны только следуюшие три случая: $x_0\in(0,c)$, $x_0\in(c,a)$ или $x_0\in$ с.

1. Пусть $x_0\in(0,c)$, тогда в этой точке [4, с. 74]

$$\nu(x_0)<0. \tag{9}$$

С другой сгороны в силу соответствуюшего однородного условия (7) (с $\widetilde{\psi}_0(x)\equiv 0$) и того, что в точке положительного максимума функции $\tau(x)$ значение оператора дробного дифференцирования $D_{0,x}^{1-2\beta}\tau(x)|_{x=0}$ положительно $[1, c.19]$, имеем $\nu(x_0)>0$. Полученное неравенство противоречить неравенству (9), следовательно, $x_0\notin(0,c)$.

2. Пусть $x_0\in(c,1)$. Здесь точно также, как и в случае $x_0\in(-1,\text{c})$, с использованием соотношения (8), $(\widetilde{\psi}_1(x)\equiv 0)$ показывается, что $x_0\notin(\text{c},1)$.

3. Пусть $x_0=c$. В этом случае из соответствующего однородного краевого условия (5) (с $\psi_1(x)\equiv 0$) при $x=c$ имеем $\tau(c)\equiv 0$, т.е. $x\neq c$.

Следовательно, решение $u(x,y)$ однородной задачи Γ своего НПЗ в точках интервали I не достигает. Отсюда следует, что решение задачи Γ удовлетворяющее условиям теоремы 1 в области $\overline{D}_a^+$ своего НПЗ достигает на $\overline{OB\cup\sigma_0}$.

Аналогично как и выше показывается, что решение $u(x,y)$ однородной задачи Γ своего НОЗ в области $\overline{D}_a^+$ может достигат только в точках $\overline{OB\cup\sigma_0}$.

Из соответствуюшего однородного краевого условия (3) (с $\varphi(s) \equiv 0$) заключаем $u(x,y) \equiv 0$ в точках области $\overline{D}_a^+$. Отсюда

$$\tau(x) = u(x,+0) = 0, \quad \nu(x) = \lim_{y\to+0} \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{10}$$

Тогда в силу непрерывности решения задачи Γ в области $\overline{D}_a^+$ и условия сопрежения (2) имеем

$$\tau(x) = u(x,-0) = 0, \quad \nu(x) = \lim_{y\to-0} \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{11}$$

Теперь, востановив функцию $u(x,y)$ в области D_a^- как решение задачи Коши с известными данными, по формулу Дарбу (6) получим $u(x,y) \equiv 0$ в области D_a^-.

Таким образом, $u(x,y) \equiv 0$ во всей смешанной области D_a. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.:Высшая школа.1985.-304 с.

2. Нахушев А.М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа. / / Дифференц. уравнения.1969, т 5, No1. с. 44-59.

3. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981. 448 с.

4. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент 2005."Universitet "Yangiyo'l poligraf servis"224 с.

УДК 517.968.74

СИСТЕМА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЕРТКИ С НЕОДНОРОДНОСТЬЮ В ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ

Асхабов С.Н.
Чеченский государственный педагогический университет, г. Грозный, Россия;
Чеченский государственный университет, г. Грозный, Россия;
askhabov@yandex.ru

Методом весовых метрик в конусе пространства непрерывных функций доказана глобальная теорема о существовании и единственности решения для системы интегро-дифференциальных уравнений типа свертки со степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части. Показано, что решение можно найти методом последовательных приближений пикаровского типа.

Ключевые слова: система интегро-дифференциальных уравнений, свертка, степенная нелинейность, неоднородность, метод весовых метрик.

SYSTEM OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF CONVOLUTION TYPE WITH INHOMOGENEITY IN THE LINEAR PART

Askhabov S.N.
Chechen State Pedagogical University, Grozny, Russia;
Chechen State University, Grozny, Russia;
askhabov@yandex.ru

A global theorem on the existence and uniqueness of a solution for a system of integro-differential equations of convolution type with power nonlinearity and inhomogeneity in the linear part is proved by the method of weighted metrics in the cone of the space of continuous functions. It is shown that the solution can be found by the method of successive approximations of the Picard type.

Key words: system of integro-differential equations, convolution, power nonlinearity, inhomogeneity, method of weight metrics.

В работах [1]–[3], в связи с приложениями в теории инфильтрации жидкости [4], распространения ударных волн в трубах, наполненных газом [5], остывания тел при лучеиспускании, следующем закону Стефана-Больцмана [6], возбуждения и торможения нейронов в нейронной сети [7] и других, были изучены однородные системы интегральных уравнений типа свертки со степенной нелинейностью в конусах пространства непрерывных функций $C[0,\infty)$. В данной работе рассматриваются вопросы, касающиеся существования, единственности, поиска и свойств решений связанной с ними неоднородной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений вида:

$$u_i^{\alpha}(x)=\sum_{j=1}^{n}\int_0^x k_{ij}(x-t)\cdot u_j'(t)\,dt+f_i(x),\quad \alpha>1\,,\quad x>0\,,\quad i=\overline{1,n}\,,\tag{1}$$

где ядро $k(x)=\{k_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n}$ и неоднородность $f(x)=\{f_i(x)\}_{i=1}^{n}$ удовлетворяют на $[0,\infty)$ условиям:

$$k_{ij}\in C^2[0,\infty),\ k_{ij}'(x)\ \text{не убывают},\ k_{ij}(0)=0\ \text{и}\ k_{ij}'(0)=p_{ij}>0.\tag{2}$$

$$f_i\in C^1[0,\infty), f_i(x)\ \text{не убывают и}\ f_i(0)=0.\tag{3}$$

В связи с указанными выше приложениями, систему (1) будем исследовать в конусе

$$Q_{0,n}^1=\big\{u: u_i\in C[0,\infty)\cap C^1(0,\infty),\ u_i(0)=0\ \text{и}\ u_i(x)>0\ \text{при}\ x>0\big\},$$

где $u(x)=\{u_i(x)\}_{i=1}^{n}$.

Наряду с системой (1) мы будем рассматривать тесно связанную с ней систему нелинейных интегральных уравнений

$$u_i^{\alpha}(x)=\sum_{j=1}^{n}\int_0^x k_{ij}'(x-t)\cdot u_j(t)\,dt+f_i(x),\quad \alpha>1\,,\quad x>0\,,\quad i=\overline{1,n}\,,\tag{4}$$

в конусе

$$Q_{0,n}=\big\{u: u=\{u_i\}_{i=1}^{n}, u_i\in C[0,\infty),\ u_i(0)=0\ \text{и}\ u_i(x)>0\ \text{при}\ x>0\big\}.$$

Получены точные априорные оценки, на основе которых методом весовых метрик доказана глобальная теорема существовании и единственности решения системы (1) и показано как его найти.

Аналогично леммам 1–3 работы [8] доказываются:

Лемма 1. *Пусть выполнены условия (2) и (3). Если* $u \in Q_{0,n}$ *является решением системы (4), то* $u(x)$ *не убывает на* $[0,\infty)$ *и непрерывно дифференцируема на* $(0,\infty)$ *, т.е.* $u \in C^1(0,\infty)$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия (2) и (3). Если* $u \in Q^1_{0,n}$ *и является решением системы интегро-дифференциальных уравнений (1), то* $u \in Q_{0,n}$ *и является решением системы интегральных уравнений (4). Обратно, если система (4) имеет решение* $u \in Q_{0,n}$ *, то* $u \in Q^1_{0,n}$ *и является решением системы (1).*

Лемма 3. *Пусть выполнены условия (2) и (3). Если* $u \in Q^1_{0,n}$ *является решением системы (1), то* $L_n(x) \le u_i(x) \le R_n(x)$ *для любых* $x \in [0,\infty)$ *и* $i = \overline{1,n}$ *, где*

$$L_n(x) \equiv \left[\frac{(\alpha-1)\,n\,p}{\alpha}\right]^{1/(\alpha-1)} x^{1/(\alpha-1)}, \quad p = \min_{1\le i,j\le n} p_{ij},$$

$$R_n(x) \equiv \left[n\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}(x) + \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right)^{(\alpha-1)/\alpha}\right]^{1/(\alpha-1)} .$$

Пример 1. *Если* $k_{ij}(x) = x$ *(а тогда* $p = 1$ *) и* $f_i(x) = 0$ *, то* $u(x) = \{u_i(x)\}_{i=1}^n$ *, где*

$$u_i(x) = F_n(x) \equiv \left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\cdot n\right]^{1/(\alpha-1)} \cdot x^{1/(\alpha-1)},$$

является решением как системы (1), так и системы (4), т.е. априорная оценка снизу из леммы 3 неулучшаема.

Пример 1 показывает (при $\alpha > 2$), что решение системы (1) может быть не дифференцируемо в точке $x = 0$. Этот факт учтен в определении конуса $Q^1_{0,n}$ и в лемме 1.

Из леммы 3 следует, что решение уравнения $u = Tu$ естественно разыскивать в конусном отрезке

$$P_n = \bigl\{u : u = \{u_i\}_{i=1}^n, u_i \in C[0,\infty) \ \text{ и } \ L_n(x) \le u_i(x) \le R_n(x)\bigr\}.$$

Лемма 4. *Пусть выполнены условия (2) и (3). Тогда класс* P_n *инвариантен относительно оператора* $T = \{T_i\}_{i=1}^n$ *, где*

$$(T_i u)(x) = \left(\sum_{j=1}^{n}\int_0^x k'_{ij}(x-t)\cdot u_j(t)\,dt + f_i(x)\right)^{1/\alpha}, \quad x > 0, \quad i = \overline{1,n} .$$

Введем теперь следующий класс функций

$$P_{b,n}=\{u : u = \{u_i\}_{i=1}^{n}, u_i \in C[0,b] \ \text{ и } \ F_n(x) \le u_i(x) \le G_n(x)\},$$

где $b > 0$ – произвольное число.

Из леммы 4 получаем, что оператор T действует из $P_{b,n}$ в $P_{b,n}$. Найдем условия, при которых он является сжимающим. Для этого предположим, что выполнены дополнительные условия:

$$\exists \eta_{ij} \in (0,b) : \quad \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} k'_{ij}(\eta_{ij}) < \alpha \cdot p \cdot n\,, \tag{5}$$

$$\sup_{0<x\le b} \frac{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)\Big)^{(\alpha-1)/\alpha}}{x} < \infty. \tag{6}$$

В случае $k_{ij}(x) = x$ условие (5) означает, что $\alpha > 1$.

Лемма 5. *Пусть ядро $k(x)$ удовлетворяет условиям (2) и (5). Тогда для любых $x \in [0,b]$ и $i,j = \overline{1,n}$ справедливо неравенство:*

$$k'_{ij}(x) \cdot e^{-\beta_{ij}\, x} \le k'_{ij}(\eta_{ij})\,, \quad \text{где} \quad \beta_{ij} = \frac{1}{p} \sup_{\eta_{ij}\le x\le b} \frac{k'_{ij}(x) - p}{x}\,.$$

Обозначим $\beta = \max\limits_{1\le i,j\le n} \beta_{ij}$ и введем в классе $P_{b,n}$ метрику

$$\varrho_b(u,v) = \max_{1\le i\le n} \sup_{0<x\le b} \frac{|u_i(x) - v_i(x)|}{x^{1/(\alpha-1)} \cdot e^{\beta\, x}}. \tag{7}$$

В результате получим полное метрическое пространство.

Используя леммы 4, 5 и связь между решениями систем (1) и (4), установленную в лемме 2, доказывается

Теорема 1. *Если выполнены условиям (2), (3), (5) и (6), то система нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа свертки (1) имеет в $Q^1_{0,n}$ (и в $P_{b,n}$ при любом $b > 0$) единственное решение. Это решение можно найти в полном метрическом пространстве $P_{b,n}$ методом последовательных приближений, которые сходятся к точному решению по метрике (7) при любом $b > 0$.*

Отметим, что системы *дискретных* уравнений типа свертки со степенной нелинейностью в различных пространствах числовых последовательностей были изучены в [9–11].

Работа выполнена в рамках реализации государственного задания по проекту «Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения и краевые задачи» в соответствии с Соглашением № 075-03-2021-071 от 29.12.2020 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Асхабов С.Н., Карапетянц Н.К., Якубов А,Я.* Интегральные уравнения типа свертки со степенной нелинейностью и их системы // Доклады АН СССР. 1990. Т. 311, № 5. С. 1035–1039.

2. *Асхабов С.Н., Бетилгириев М.А.* Нелинейные интегральные уравнения типа свертки с почти возрастающими ядрами в конусах // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, № 2. С. 321–330.

3. *Асхабов С.Н.* Нелинейные уравнения типа свертки. М.: Физматлит, 2009. 304 с.

4. *Okrasinski W.* Nonlinear Volterra equations and physical applications // Extracta Math. 1989. Vol. 4, № 2. P. 51–74.

5. *Keller J.J.* Propagation of simple nonlinear waves in gas filled tubes with friction // Z. Angew. Math. Phys. 1981. Vol. 32, № 2. P. 170–181.

6. *Тихонов А.Н.* Об остывании тел при лучеиспускании, следующем закону Stefan'a-Boltzmann'a // Изв. АН СССР (отд. матем. и ест. наук, серия геогр. и геофиз.). 1937. № 3. С. 461–479.

7. *Ermentrout G.B., Cowan J.D.* Secondary bifurcation in neuronal nets // SIAM J. Appl. Math. 1980. Vol. 39, № 2. P. 323–340.

8. *Асхабов С.Н.* Интегро-дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56, № 6. С. 786–795.

9. *Асхабов С.Н., Карапетянц Н.К.* Дискретные уравнения типа свертки с монотонной нелинейностью // Дифференциальные уравнения // 1989. Vol. 25, № 10. С. 1777–1784.

10. *Askhabov S.N., Karapetian N.K.* Convolution type discrete equations with monotonous nonlinearity in comples spaces // Journal of Integral Equations and Math. Phys. 1992. Vol. 1, № 1. P. 44–66.

11. *Асхабов С.Н., Карапетянц Н.К.* Дискретные уравнения типа свертки с монотонной нелинейностью в комплексных пространствах // Доклады Академии Наук. 1992. Т. 322, № 6. С. 1015–1018.

УДК 517.95

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕСКОЛЬКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Аттаев А.Х., Хубиев К.У.
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, г. Нальчик, Россия;
attaev.anatoly@yandex.ru, khubiev_math@mail.ru

Для спектрально-нагруженного в общем случае одномерного волнового уравнения выписаны аналоги формулы Даламбера. Исследованы вопросы области зависимости, области влияния и области определения данных Коши в зависимости от вида нагруженных слагаемых.

Ключевые слова: задача Коши, нагруженное уравнение, волновое уравнение, уравнение гиперболического типа.

THE CAUCHY PROBLEM FOR A LOADED ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATION WITH SEVERAL PARAMETERS

Attaev A.Kh., Khubiev K.U.
Institute of Applied Mathematics and Automation of KBSC RAS, Nalchik, Russia;
attaev.anatoly@yandex.ru, khubiev_math@mail.ru

Analogs of the D'alembert formula are written out for a one-dimensional wave equation that is spectrally loaded in the general case. The questions of the domain of dependence, the domain of influence and the domain of determination of Cauchy data depending on the type of loaded terms are investigated.

Key words: Cauchy problem, loaded equation, wave equation, equation of hyperbolic type.

Объектом исследования в данном сообщении является нагруженное [1] уравнение вида

$$u_{xx} - u_{tt} = \alpha u(x_0, t) + \beta u_t(x_0, t) + \gamma u_{tt}(x_0, t), \tag{1}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, x_0$ – произвольные действительные константы. Как известно, геометрия области, где рассматривается задача Коши для уравнения (1) в случае, когда $\alpha = \beta = \gamma = 0$, определяется характеристиками уравнения (1) и кривой, где задаются данные Коши. В нашем случае уравнение (1) диктует для области Ω, где ищется решение задачи Коши, еще одно условие, а именно: если $(x, t) \in \bar{\Omega}$, то $(x_0, t) \in \bar{\Omega}$.

Задача Коши. Найти регулярное решение $u(x, t)$ *уравнения (1) в области* $\Omega = \left\{(x, t) : x - t < l, x + t < l, -x_0 < t < x_0\right\}$, $l > 0$, $x_0 \in]0, l/2]$, *удовлетворяющее условиям*

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad u_t(x, 0) = \nu(x), \quad 0 \leq x \leq l. \tag{2}$$

Здесь надо отметить, что если $x_0 \in [l/2, l[$, то $x_0 - l < t < l - x_0$, поэтому не нарушая общности можно считать, что $x_0 \in]0, l/2]$. Для различных значений параметров α, β, γ выписываются аналоги формулы Даламбера. В соответствии с [2, с. 158] обсуждаются вопросы области зависимости, области влияния и области определения данных Коши, а также соблюдение принципа Гюйгенса для уравнения (1), когда $\alpha = \beta = 0$, $\gamma \neq 0$. В этом случае уравнение (1) относится к классу существенно (спектрально) нагруженных уравнений [3]. Показано, что задача Коши при $\gamma = -1$ является некорректной. Частично эти вопросы были исследованы в работах авторов [4-6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применения. М.: Наука, 2012. 232 с.

2. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 2012. 336 с.

3. *Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. Алматы: ҒЫЛЫМ, 2010. 334 с.

4. *Аттаев А.Х.* Краевые задачи для нагруженного волнового уравнения// Вестник Карагандинского университета. Серия: Математика. 2017. № 2(86). С. 8–13.

5. *Attaev A.Kh.* The Cauchy problem for the MC Kendrick-von Foerster loaded equation// International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2017. V. 113. № 4. P. 47–52.

6. *Хубиев К.У.* Задача Коши для одного нагруженного волнового уравнения// Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2020. Т. 20. № 4. С. 9–14.

УДК 517.928.7

УСРЕДНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МНОГОТОЧЕЧНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Бигириндавйи Д. [1] **, Левенштам В.Б.** [2]
[1] *Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия;*
[2] *Южный математический институт, Владикавказ, Россия;*
bigirindavyidaniel@gmail.com, vlevenshtam@yandex.ru

Метод усреднения Крылова-Боголюбова обоснован для нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с многоточечными краевыми условиями.

Ключевые слова: нормальная система, быстро осциллирующие данные, многоточечная краевая задача, метод усреднения.

Averaging for differential equations with multipoint boundary value problems

Bigirindavyi D. [1] **, Levenshtam V.B.** [2]
[1] , [2] *Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia;*
[2] *Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz, Russia;*
bigirindavyidaniel@gmail.com, vlevenshtam@yandex.ru

The Krylov-Bogolyubov averaging method is justified for normal systems of ordinary differential equations with multipoint boundary value problems.

Key words: normal system, fast oscillating data, multipoint boundary value problem, averaging method.

1. Введение

Метод усреднения Крылова–Боголюбова [*1-3*] для дифференциальных уравнений с начальными данными широко известен. Однако для уравнений с многоточечными краевыми условиями он исследован недостоточно. Отметим известные нам три работы: [*4-5*], где метод усреднения обоснован для двухточечных краевых задач, и [*6*], где он обоснован для многоточечных задач при произвольном числе точек $m \geq 2$. В основе исследований [*4-5*] лежит классическая теорема о неявных функциях, которую в теории метода усреднения впервые, по–видимому, применил И.Б.Симоненко в работе [*7*]. В работе [*6*], в отличие от этого, используется классическая лемма Гронуолла. Отметим, что в [*6*] предполагается существование решения не только усредненной задачи (это традиционное требование в теории метода усреднения), но и разрешимость существенно более сложной возмущенной задачи. В данной работе используется указанный выше подход, основанный на теореме о неявных функциях, что позволило избежать последнего жесткого предположения. Правда, этот подход потребовал усиления требований гладкости данных задачи по сравнению с [*6*].

2. Основной результат

Пусть Ω - область пространства $\mathbb{R}^n$, $T > 0$, $\Pi = \{(x,t) : x \in \Omega, t \in [0,T]\}$ и $Q = \{(x,t,\tau) : x \in \Omega, t \in [0,T], \tau \in [0,\infty)\}$. На множестве Π рассмотрим m-точечную краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,t,\omega t) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m} A_k x(t_k) = a \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\omega \gg 1$, A_k- квадратные матрицы порядка n, $0 = t_1 < t_2 ... < t_m = T$, a-n-мерный вектор. Все матрицы, векторы и вектор-функции в работе считаются вещественными. Пусть $f(x,t,\tau)$ вектор - функция, определенная на множестве Q со значениями в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяющая следующим условиям

1. $f(x,t,\tau)$ вместе с ее первыми частными производными по x непрерывна на множестве Q. Соответствующую матрицу Якоби будем обозначать через $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)$.

2. Вектор-функция $f(x,t,\tau)$ и матрица Якоби $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)$ равномерно ограничены и равномерно непрерывны по $(x,t$ на Q.

3. Существует вектор-функция $F(x,t)$, определенная на множестве Π со значениями в $\mathbb{R}^n$, что равномерно относительно $(x,t)\in\Pi$ справедливо предельное равенство:

$$\langle f(x,t,\tau)\rangle \equiv \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x,t,\tau)\,\mathrm{d}\tau = F(x,t). \tag{2}$$

4. Будем считать, что наряду с равенством (2) справедливо равенство

$$\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)\rangle \equiv \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{\partial F}{\partial x}(x,t). \tag{3}$$

Рассмотрим усредненную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = F(y,t) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m} A_k y(t_k) = a_0 \end{cases} \tag{4}$$

5. Будем предполагать, что задача (4) имеет решение $\overset{o}{y}(t)$, $t\in[0,T]$, которое вместе с некоторой $\rho(>0)$ – окрестностью лежит в Ω, то есть при каждом $t\in[0,T]$ расстояние от $\overset{o}{y}(t)$ до границы Ω больше ρ.

Символом $\Phi(t)$, $t\in[0,T]$, обозначим матрицант системы

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}(\overset{o}{y}(t),t)x \tag{5}$$

6. Пусть справедливо соотношение:

$$\Delta = \det\left[\,\sum_{k=1}^{m} A_k\Phi(t_k)\right] \neq 0$$

Напомним, что матрицантом системы (3)называют её фундаментальную матрицу $\Phi(t)$ решений, нормированную в точке $t=0$, то есть $\Phi(0)=E$

Далее символом $C_\mu([0,T])$, $\mu \in (0,1)$, будем обозначать известное гельдерово пространство, то есть пространство непрерывных вектор -функций $x : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию :
$||x||_{C_\mu([0,T])} = \max\limits_{0\le t\le T}|x(t)| + \sup\limits_{0\le t_1<t_2\le T} \frac{|x(t_2)-x(t_1)|}{(t_2-t_1)^\mu} < \infty$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Для любого* $\mu \in (0,1)$ *найдется* $\omega_0 > 0$ *такое, что задача* (1) *при* $\omega > \omega_0$ *в некоторой* $C_\mu([0,T])$ *-окрестности вектор-функции* $\overset{o}{y}(t)$ *имеет единственное решение* $x_\omega(t)$ *и справедливо предельное равенство* $\lim\limits_{\omega\to\infty}||x_\omega(t) - \overset{o}{y}(t)||_{C_\mu([0,T])} = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боголюбов Н.Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. М.: Изд-во Академии наук УССР, 1945.

2. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва.: Физматлит, 1974.

3. *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев:. Наукова думка, 1971.

4. *Левенштам В.Б., Шубин П.Е.* Обоснование метода усреднения для дифференциальных уравнений с большими быстро осциллирующими слагаемыми и краевыми условиями// Матем. заметки. 2016. том 100. выпуск 1. С. 94–108.

5. *Бигириндавйи Д., Левенштам В. Б.* Принцип усреднения для системы быстро осциллирующих оду с краевыми условиями// Вестник ВГУ. 2020.Серия,физика.Математика. № 1. С. 31–37.

6. *Константинов М.М., Байнов Д.Д.* О применении метода усреднения к некоторым многоточечным краевым задачам // BULL.MATH.de la Soc.Sci.Math. de la R.S.de la Roumanie. 1974. том 18(66). номер 3/4. С. 307–310.

7. *Симоненко И.Б.* Обоснование метода осреднения для абстрактных параболических уравнений// Матем. сб. 1970. том 81(123). номер 1. С. 53–61.

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ С ДИНАМИЧЕСКИМ НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Богатов А.В.
Самарский университет, г. Самара, Россия;
andrebogato@mail.ru

Рассмотрена задача с динамическим нелокальным условием для одномерного гиперболического уравнения, возникающая при исследовании колебаний стержня. Получены условия на входные данные, обеспечивающие однозначную разрешимость поставленной задачи, проведено доказательство существования и единственности решения задачи в пространстве Соболева.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, нелокальные условия, единственность решения, разрешимость задачи.

ABOUT ONE PROBLEM WITH A DYNAMIC NONLOCAL CONDITION FOR THE HYPERBOLIC EQUSTION

Bogatov A.V.
Samara University, Sterlitamak, Russia;
andrebogato@mail.ru

We study a problem with a dynamic nonlocal condition for the one-dimensional hyperbolic equation, which occurs in the study of rod vibrations. Conditions have been obtained for input data, providing unambiguous resolution of the task, proof of the existence and singularity of the problem in Sobolev's space.

Key words: hyperbolic equation, nonlocal conditions, singularity of the solution, solveability of the problem.

Рассмотрена нелокальная задача с интегральным условием, внеинтегральные члены которого содержат как след производной по пространственной переменной, так и след производной по времени, что отражает наличие в рассматриваемой системе демпфера. Такие условия возникают при математическом моделировании многих физических процессов и явлений. Строительные конструкции и сооружения в значительной степени подвержены как природным, так и техногенным динамическим воздействиям, к которым можно отнести ветровые и сейсмические воздействия, нагрузки от оборудования, движущегося транспорта, пешеходов. Энергия колебаний инженерных систем постепенно рассеивается за счет внутреннего трения в материале и внешнего сопротивления, что, безусловно, влияет на их колебательный процесс, а снижение интенсивности внешних динамических воздействий приводит к затуханию колебаний. Для обеспечения безаварийной работы инженерных систем необходимо проводить динамические расчеты конструкций и сооружений, выявлять их динамические характеристики. Также стоит отметить, что необходимо учитывать влияние эффекта внутреннего демпфирования, которое гасит колебания за счет трения в материале и тем самым влияет на общий колебательный процесс. И если уже известно, как учитывать эффекты внешнего трения (внешнее гашение колебаний), то задача учета внутреннего трения до сих пор не имеет однозначного решения. Переходя к математическим терминам, мы получаем задачу с нелокальными условиями, которая описывает модель внутреннего трения (нелокального демпфирования материала).

Математическая модель поставленной задачи имеет вид. В области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$ найти решение уравнения

$$Lu \equiv u_{tt} - (au_x)_x + bu_t + cu = f(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0, \tag{2}$$

граничному условию

$$u_x(0,t) = 0 \tag{3}$$

и нелокальному условию

$$u_x(l,t) + \gamma u_t(l,t) + \int_0^l K(x)u_t(x,t)dx = 0. \tag{4}$$

В современной теории дифференциальных уравнений задачи с нелокальными условиями представляют собой интенсивно развивающееся направление [1 – 6]. Исследования нелокальных задач показали, что классические подходы к их решению неприменимы [7].

Однако к настоящему времени разработаны некоторые методы, позволяющие преодолеть трудности, возникающие вследствие нелокальных условий [8]. Модификацией одного из них мы и воспользовались для доказательства однозначной разрешимости поставленной задачи в пространстве Соболева.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гордезиани Д.Г., Авалишвили Г.А.* Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Матем. моделирование. 2000. Т. 12. № 1. С. 94–103.

2. *Кожанов А.И.* О разрешимости некоторых краевых задач с условием Бицадзе-Самарского для линейных гиперболических уравнений // Современная математика и ее приложения. Тбилиси. 2010. Т. 67. С. 84–96.

3. *Кожанов А.И., Пулькина Л.С.* О разрешимости некоторых граничных задач со смещением для линейных гиперболических уравнений // Математический журнал. Алматы. 2009. Т. 9. № 2. С. 78–92.

4. *Пулькина Л.С.* О разрешимости в L_2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36. № 2. С. 279–280.

5. *Пулькина Л.С.* Л.С Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения // Матем. заметки. 2003. Т. 74. № 3. С. 435–445.

6. *Bouziani A.* Strong solution to an hyperbolic evolution problem with nonlocal boundary conditions // Maghreb Math. Rev. 2000. V. 9. P. 71–84.

7. *Бейлин С.А.* Смешанные задачи с интегральными условиями для волнового уравнения. Самара, 2005.

8. *Pulkina L.S.* Solution to nonlocal problems of pseudohyperbolic equations // EJDE. 2014. V. 116. P. 1–9.

УДК 517.95

ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ОПЕРАТОРА БЕССЕЛЯ

Булатов Ю.Н.
Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, г. Елец, Россия;
y.bulatov@bk.ru

Дано представление функции Грина классической задачи Дирихле для единичного шара произвольной размерности. Исследуется ассимптотика при $k > 1$ функции Грина сингулярного оператора Бесселя Δ_B. Показано, что функция Грина может быть выражена в терминах элементарных функций, и выписан явный ее вид.

Ключевые слова: функция Грина, сингулярный оператор Бесселя, оператор Лапласа, сферическая симметрия.

GREEN FUNCTION FOR SINGULAR OPERATOR BESSEL

Bulatov Y.N.
Bunin Yelets State University, Yelets, Russia;
y.bulatov@bk.ru

A representation of the Green's function of the classical Dirichlet problem for a unit ball of arbitrary dimension is given. The asymptotics for $k > 1$ of the Green's function of the singular Bessel operator Δ_B is investigated. It is shown that the Green's function can be expressed in terms of elementary functions, and its explicit form is written out.

Key words: Green's function, Bessel singular operator, Laplace operator, spherical symmetry.

Через E_N^+ обозначим часть евклидова пространства точек $x = (x', x'') = (x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_N), x_1 > 0, ..., x_n > 0$. Число n предполагается фиксированным, $1 \leqslant n \leqslant N$. G – область в E_n^+ , ограниченная открытой частью Γ_0 гиперплоскости $x_n = 0$ и гиперповерхностью Γ , $G_0 = G \cup \Gamma_0$ и $\overline{G} = G_0 \cup \Gamma_0$.

Роль оператора Лапласа в наших рассуждениях играет следующий сингулярный дифференциальный оператор

$$\Delta_B = \sum_{j=1}^{n} B_j + \sum_{i=n+1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, B_{x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma}{x_i}\frac{\partial}{\partial x},$$

который рассматривается на функциях, четных по каждой из переменных $x_1, ..., x_n$.

Однородный многочлен P_m^γ порядка m, четный по каждой из переменных $x_1, ..., x_n$, $x \in E_n^+$, $1 \leqslant n \leqslant N$, удовлетворяющий уравнению $\Delta_B P_m^\gamma = 0$, называется B-гармоническим. Весовой сферической функцией называется сужение B-гармонического многочлена на сферу:

$$Y_m^\gamma \Theta = \frac{P_m^\gamma x}{|x|^m} = P_m^\gamma \frac{x}{|x|}$$

Теория сферических функций опирается на формулу Грина: интегральное представление функций класса C^2 через фундаментальное решение оператора Лапласа $|S_1|^{-1}|x-y|^{2-n}$. Традиционная схема доказательства подобных формул следующая: вырезается подходящая окрестность особой точки, а затем переходят к пределу, когда диаметр вырезанной области стремится к нулю.

Фундаментальное решение $\varepsilon_\gamma(x) = C|x|^{2-n-|\gamma|}$ оператора Δ_B с особенностью в произвольной точке E_n^+ получается применением обобщенного сдвига:

$$T^y|x|^{2-n-|\gamma|} = C\int\limits_0^\pi ... \int\limits_0^\pi \Bigg[\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i cos\alpha_i) +$$

$$+|x'' - y''|^2\Bigg]^{\frac{2-N-|\gamma|}{2}} \prod_{j=1}^{n} sin^{\gamma_j - 1}\alpha_j d\alpha_j.$$

Как видим, особой точкой оказалась точка $N+n$-мерного пространства $x = y$, $\alpha_1 = 0, ..., \alpha_n = 0$. Поэтому использование обычной схемы приведет к разрушению обобщенного сдвига, а вместе с ним и фундаментального решения оператора Δ_B. Это приводит к существенным техническим сложностям в доказательстве подобной формулы Грина. В [1] получена и удачно использована подобная формула Грина для случая, когда обобщенный сдвиг применяется к самой функции, а не к фундаментальному решению, но в наших рассуждениях такая формула не применима.

Рассмотрим функцию

$$G(x,y) = T_x^y k(x) + h(x,y)$$

Эта функция B-гармонична в области $G_0 \setminus \{y\}$ и имеет в точке y особенности:

$$\mathrm{O}(|x-y|^{2-n}), \quad \text{если} \quad y_n \neq 0,$$
$$\mathrm{O}(|x-y|^{2-n-|\gamma|}), \quad \text{если} \quad y_n = 0.$$

Определение. Функцией Грина для области G_0 с полюсом в точке y называется функция $G(x,y)$, заданная и непрерывная в $\overline{G} \setminus \{y\}$, такая что

$$G(\xi,y) = 0 \quad \text{для} \quad \xi \in \Gamma,$$
$$G(x,y) \quad \mathrm{B}-\text{гармонична} \quad \text{в} \quad G_0 \setminus \{y\}.$$

Теорема. Пусть для области G_0 функция Грина существует и имеет непрерывные производные в $\overline{G} \setminus \{y\}$. Через $H_B(\overline{G})$ обозначим линейное подпространство, состоящее из всех B-гармонических функций в G_0. Тогда для любой функции $u(x) \in H_B(\overline{G})$, имеет место равенство

$$u(y) = -\int\limits_{\Gamma} u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} G(\xi,y) \xi_n^\gamma d_\xi \Gamma,$$

где $\frac{\partial}{\partial \nu_\xi}$ - производная по внешней нормали к Γ в точке $\xi \in \Gamma$.

Доказательство проводится по обычной схеме с помощью второй формулы Грина для оператора Δ_B.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Киприянова Н.И.* Интегральные оценки B-полигармонических функций. Новгород.: НГПИ, 1989. № 2. С. 16.

2. *Ляхов Л.Н., Санина Е.Л.* Оператор Киприянова-Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B-гармонического уравнения. Москва.: Дифференциальные уравнения. 2020. Т.56. № 12. С. 1564–1574.

УДК 517.956

ГИПЕРБОЛИЧНОСТЬ КОВАРИАНТНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Вирченко Ю.П., Новосельцева А.Э.
Белгородский государственный университет, г. Белгород, Россия;
virch@bsu.edu.ru

Рассмотрен класс систем $\dot{\boldsymbol{u}} = \mathsf{L}'[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\rho}]$, $\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathsf{L}''[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\rho}]$ *квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. Каждая из них описывает изменение со временем* $t \in \mathbb{R}$ *пары* $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\rho} \rangle$, *состоящей из векторного поля* $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ *и набора* $\boldsymbol{\rho} = \langle \rho^{(s)}(\boldsymbol{x}, t); s = 1 \div N \rangle$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ *скалярных полей. Класс состоит из систем, инвариантных относительно трансляций времени* $t \in \mathbb{R}$ *и пространства* $\mathbb{R}^3$, *а также преобразующихся ковариантным образом при вращении* $\mathbb{R}^3$. *Дается описание соответствующего класса нелинейных дифференциальных операторов* $\mathsf{L} = \langle \mathsf{L}'[\cdot], \mathsf{L}''[\cdot] \rangle$ *первого порядка, действующих в функциональном пространстве* $C^{3+N}_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, *которые являются генераторами эволюции. Найдены условия, при которых пара* L *операторов порождает гиперболическую систему.*
Ключевые слова: дифференциальные операторы первого порядка, квазилинейные системы уравнений, гиперболичность, векторное поле, ковариантность, сферическая симметрия.

HYPERBOLIC COVARIANT SYSTEMS OF FIRST ORDER EQUATIONS

Virchenko Yu.P., Novoseltseva A.E.
Belgorod State University, Belgorod, Russia;
virch@bsu.edu.ru

The class of systems $\dot{\boldsymbol{u}} = \mathsf{L}'[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\rho}]$, $\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathsf{L}''[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\rho}]$ *of quasilinear partial differential equations of first order is studied. Each of them describes the temporal evolution of the pair* $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\rho} \rangle$ *consisting of vector field* $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ *and the collection* $\boldsymbol{\rho} = \langle \rho^{(s)}(\boldsymbol{x}, t); s = 1 \div N \rangle$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ *of scalar fields. The class includes such systems which are invariant relative to any temporal and space* $\mathbb{R}^3$ *translations and also they are transformed by covariant way at any rotations of* $\mathbb{R}^3$. *The description of the correspondent class* *of quasilinear differential operators* $\mathsf{L} = \langle \mathsf{L}'[\cdot], \mathsf{L}''[\cdot] \rangle$ *of first order is given which act in the functional space* $C^{3+N}_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ *and they are the evolution generators. The when the operator pair* L *generates the hyperbolic system are found.*

Key words: differential operators of first order, quasilinear equation systems, hyperbolicity, vector field, covariance, spherical symmetry.

1. Введение. В этом сообщении приводятся результаты исследования специальных бесконечномерных динамических систем, описывающих эволюцию полей на $\mathbb{R}^3$. Эти динамические системы выделены тем, что они обладают фундаментальными физическими симметриями. Рассматривается система эволюционных уравнений дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},t) = \Big(\mathsf{L}'[\boldsymbol{u},\boldsymbol{\rho}]\Big)(\boldsymbol{x},t)\,, \qquad \dot{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{x},t) = \Big(\mathsf{L}''[\boldsymbol{u},\boldsymbol{\rho}]\Big)(\boldsymbol{x},t) \tag{1}$$

в функциональном пространстве $\mathrm{C}^{\,3+N}_{\,1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ наборов $\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{\rho}\rangle$ непрерывно дифференцируемых полей на $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{u} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\rho} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^N$, зависящих от параметра $t \in \mathbb{R}$. Они описывают изменение со временем t векторного поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ и набора N скалярных полей $\boldsymbol{\rho} = \langle \rho^{(s)}(\boldsymbol{x},t); s = 1 \div N\rangle$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$. Генератор эволюции $\mathsf{L} \equiv \langle \mathsf{L}'[\boldsymbol{u},\boldsymbol{\rho}], \mathsf{L}''[\boldsymbol{u},\boldsymbol{\rho}]\rangle$ в (1) представляется многокомпонентным квазилинейный дифференциальный оператор первого порядка, действующий в пространстве $\mathrm{C}^{\,N+3}_{\,1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$.

Значения векторного поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \langle u_j(\boldsymbol{x},t); j \in \{1,2,3\}\rangle$ представляются полярными векторами в $\mathbb{R}^3$. Оператор $\mathsf{L}'[\,\cdot\,]$ осуществляет отображение $\mathsf{L}'[\,\cdot\,] : \mathrm{C}^{\,3+N}_{\,1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3) \mapsto \mathrm{C}^{\,3}_{\,1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, и поэтому он разлагается на декартовы компоненты $\mathsf{L}'[\,\cdot\,] = \langle \mathsf{L}_j[\,\cdot\,]; j \in \{1,2,3\}\rangle$, согласно декартовым компонентам $u_j(\boldsymbol{x},t); j \in \{1,2,3\}$ векторного поля в левой части (1). Каждая компонента осуществляет отображение $\mathsf{L}_j[\,\cdot\,] : \mathrm{C}^{\,3+N}_{\,1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3) \mapsto \mathrm{C}_{\,1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, $j \in \{1,2,3\}$.

Действие каждой компоненты $\mathsf{L}_j[\,\cdot\,]$, $j \in \{1,2,3\}$ дифференциального оператора $\mathsf{L}'[\,\cdot\,]$ в уравнении (1) дается формулой

$$\mathsf{L}_j[\boldsymbol{u},\boldsymbol{\rho}] = a_{jk;\,l}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\rho})\nabla_k u_l + \sum\nolimits_s b^{(s)}_{jk}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\rho})\nabla_k \rho^{(s)} + H_j(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\rho})\,. \tag{2}$$

$j \in \{1,2,3\}$. Коэффициенты $a_{jk;l}$, $b^{(s)}_{jk}$ и слагаемые H_j представляют собой значения в точке $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$, $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x},t)$ непрерывных на $\mathbb{R}^3$ функций $a_{jk;l} \equiv a_{jk;l}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\rho})$, $b_{jk}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\rho})$, $H_j \equiv H_j(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\rho})$; $j,k,l \in \{1,2,3\}$.

Так как $\boldsymbol{\rho} = \langle \rho^{(s)}; s = 1 \div N \rangle$, то оператор L'' разлагается на N компонент $\mathsf{L}'' = \langle \mathsf{L}^{(s)}[\cdot]; s = 1 \div N \rangle$. Каждая из них представляет квазилинейный дифференциальный оператор первого порядка, $\mathsf{L}^{(s)}[\,\cdot\,] : \mathrm{C}^{\,3+N}_{\,1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3) \mapsto \mathrm{C}_{\,1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$. Результат действия каждой компоненты в уравнении (1) дается формулой

$$\mathsf{L}^{(s)}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\rho}] = a^{(s)}_{k;\,l}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\rho}) \nabla_k u_l + \sum\nolimits_{s'} b^{(s,s')}_k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\rho}) \nabla_k \rho^{(s')} + H^{(s)}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\rho})\,, \quad (3)$$

$s = 1 \div N$, где коэффициенты $a^{(s)}_{k;l}$, $b^{(s,s')}_k$ и слагаемые $H^{(s)}$ представляют собой значения в точке $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x}, t)$ непрерывных на $\mathbb{R}^3$ функций $a^{(s)}_{k;\,l}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\rho})$, $b^{(s,s')}_k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\rho})$, $H^{(s)} \equiv H^{(s)}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\rho})$; $k, l \in \{1, 2, 3\}$, $s = 1 \div N$.

2. Ковариантные системы уравнений. Рассматривается класс систем уравнений (1) с операторами (2), (3), которые обладают ковариантностью по отношению к преобразованиям группы $\mathbb{O}_3$ ортогональных 3×3 -матриц $\mathcal{A}$ на пространстве $\mathbb{R}^3$.

Пусть $\mathsf{L}^{(\mathcal{A})}[\cdot]$ оператор, который получается в результате преобразования $\mathsf{L}[\cdot]$ матрицей $\mathcal{A} \in \mathbb{O}_3$. Так как $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ — векторное поле, то, при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$, его значения в каждой точке $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ переходят в $(\mathcal{A}\boldsymbol{u})(\boldsymbol{x}, t)$. Компоненты набора $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x}, t)$ являются скалярными полями $\rho^{(s)}(\boldsymbol{x}, t)$, $s = 1 \div N$. Требование ковариантности уравнения (1) означает, что оператор $\mathsf{L}[\cdot]$ обладает свойством $\mathsf{L}^{(\mathcal{A})}[\,\mathcal{A}\,\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\rho}] = \mathcal{A}\,\mathsf{L}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\rho}]$.

Свойство ковариантности системы (1) означает, что коэффициенты $a^{(s)}_{k;\,l}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\rho})$, $b^{(s)}_{jk}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\rho})$, $a_{jk;l}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\rho})$, изменяются как тензоры при преобразованиях $\mathcal{A}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ в фиксированной точке $\langle \boldsymbol{x}, t \rangle \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, соответственно, 2-го и 3-го рангов в $\mathbb{R}^3$, а коэффициенты $b^{(s,s')}_k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\rho})$ и функции $H_j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\rho})$ — как векторы в $\mathbb{R}^3$. Функции же $H^{(s)}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\rho})$ остаются неизменными при этих преобразованиях аргумента. Класс ковариантных систем уравнений (1), обозначаем посредством $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3; 1, N)$.

3. Системы класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3; 1, N)$. Возникает задача об описании класса ковариантных систем (1) - (3). Она сводится к описанию всех возможных типов тензор-функций $a_{jk;l}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\rho})$, $a^{(s)}_{k;\,l}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\rho})$, $b^{(s)}_{k;l}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\rho})$ и вектор-функций $b^{(s,s')}_k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\rho})$, $H_j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\rho})$.

Описание тензор-функций $a_{jk;l}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\rho})$, $a^{(s)}_{k;l}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\rho})$, $b_{k;l}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\rho})$ дается в терминах разложений по наборам форм-инвариантных тензор-функций:

$$a_{jk;l}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\rho}) = \sum_{r=1}^{n_3} f_r F^{(r)}_{j,k,l}(\boldsymbol{u})\,,$$

$$a^{(s)}_{k;l}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\rho}) = \sum_{r=1}^{n_2} f^{(s)}_r F^{(r)}_{k,l}(\boldsymbol{u})\,,\quad b^{(s)}_{kl}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\rho}) = \sum_{r=1}^{n_2} g^{(s)}_r F^{(r)}_{k,l}(\boldsymbol{u})\,, \qquad (4)$$

где $\{F^{(r)}_{k,l}(\boldsymbol{u}); r = 1 \div n_2\}$, $\{F^{(r)}_{j,k,l}(\boldsymbol{u}); r = 1 \div n_3\}$ представляют собой базисы в пространствах форм-инвариантных тензор-функций — тензоров, соответственно, 2-го и 3-го ранга. Этим наборам базисных функций соответствуют наборы $\{f_r; r = 1 \div n_3\}$, $\{f^{(s)}_r; r = 1 \div n_2\}$, $\{g^{(s)}_r; r = 1 \div n_2\}$, $s = 1 \div N$ коэффициентных функций, состоящие из произвольных непрерывных функций, зависящих от набора алгебраически независимых инвариантов группы $\mathbb{O}_3$ и набора $\boldsymbol{\rho}$.

Изучается т.н. сферически симметричный случай, когда имеется единственный инвариант вектора $\eta \equiv \boldsymbol{u}^2$, а набор образующих тензорной алгебры состоит из универсального тензора второго ранга $\boldsymbol{\delta}$ с компонентами $\delta_{jk} = \{1, j = k; 0, j \neq k\}$ и вектора $\boldsymbol{u}$. В этом случае все допустимые вектор-функции $H_j(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\rho})$ даются формулой $H_j(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\rho}) = u_j H(\boldsymbol{u}^2,\boldsymbol{\rho})$, где $H(\eta,\boldsymbol{\rho})$ — произвольная непрерывная функция на $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ от η и набора $\boldsymbol{\rho}$ скаляров. Соответственно, $b^{(s,s')}_k(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\rho}) = u_k g^{(s,s')}(\boldsymbol{u}^2,\boldsymbol{\rho})$, где $g^{(s,s')}(\boldsymbol{u}^2,\boldsymbol{\rho})$ — произвольные непрерывные функции от η и $\boldsymbol{\rho}$, $s, s' = 1 \div N$.

Имеется только два линейно независимых тензора второго ранга $F^{(1)}_{jk} = \delta_{jk}$ и $F^{(2)}_{jk} = u_j u_k$, $j,k \in \{1,2,3\}$, которые составляют базис разложений тензор-функций 2-го ранга в (4) и только четыре линейно независимых тензора третьего ранга: $F^{(1)}_{jkl} = \delta_{jk} u_l$, $F^{(2)}_{jkl} = \delta_{kl} u_j$, $F^{(3)}_{jkl} = \delta_{jl} u_k$ и $F^{(4)}_{jkl} = u_j u_k u_l$, $j,k,l \in \{1,2,3\}$. Таким образом, $n_3 = 4$ и $n_2 = 2$ и разложения (4) принимают вид

$$a_{jk;l}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\rho}) = f_1 \delta_{jk} u_k + f_2 \delta_{kl} u_j + f_3 \delta_{jl} u_k + f_4 u_j u_k u_l\,,$$

$$b^{(s)}_{jk} = g^{(s)}_1 \delta_{jk} + g^{(s)}_2 u_j u_k\,,\quad a^{(s)}_{k;l} = \delta_{kl} f^{(s)}_1 + u_k u_l f^{(s)}_2$$

с непрерывными функциями $f_r \equiv f_r(\eta,\boldsymbol{\rho})$, $r \in \{1,2,3,4\}$; $f^{(s)}_r = f^{(s)}_r(\eta,\boldsymbol{\rho})$, $g^{(s)}_r = g^{(s)}_r(\eta,\boldsymbol{\rho})$, $r \in \{1,2\}$, $s = 1 \div N$. Общий вид уравнения $\dot{\boldsymbol{u}} = \mathsf{L}'[\boldsymbol{u},\boldsymbol{\rho}]$ системы (1) из класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3, 1, N)$ дается формулой

$$\dot{u}_j = f_1(\boldsymbol{u}, \nabla_j \boldsymbol{u}) + f_2 u_j (\nabla, \boldsymbol{u}) + f_3 (\boldsymbol{u}, \nabla) u_j + f_4 u_j (\boldsymbol{u}, (\boldsymbol{u}, \nabla)\boldsymbol{u})$$

$$+\sum\nolimits_s \left(g_1^{(s)}\nabla_j\rho^{(s)} + g_2^{(s)}u_j(\boldsymbol{u},\nabla)\rho^{(s)}\right) + H_j\,, \quad j\in\{1,2,3\}\,. \qquad (5)$$

Система с $s=1\div N$ уравнений $\dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathsf{L}''[\boldsymbol{u},\boldsymbol{\rho}]$ в (1) принимает вид

$$\dot\rho^{(s)} = f_1^{(s)}(\nabla,\boldsymbol{u}) + f_2^{(s)}(\boldsymbol{u},(\boldsymbol{u},\nabla)\boldsymbol{u}) + \sum\nolimits_{s'} g^{(s,s')}(\boldsymbol{u},\nabla)\rho^{(s')} + H^{(s)}. \quad (6)$$

4. Гиперболичность систем класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3,1,N)$. Системе (1) с операторами (2), (3) сопоставляется $(N+3)\times(N+3)$-матрица $\mathcal{T}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\rho})$ со следующей блочной структурой

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\rho}) = \begin{pmatrix} T_{jl} & A_j^{(s')} \\ B_l^{(s)} & T^{(s,s')}\end{pmatrix}, \qquad j,l\in\{1,2,3\}\,;\ s,s'\in\{1,...,N\}$$

и блоками в виде 3×3-матрицы $T_{jl} = q_k a_{jk;l}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\rho})$, $N\times N$-матрицы $T^{(s.s')} = q_k b_k^{(s,s')}$ и прямоугольными блоками: $3\times N$-матрицей $A_j^{(s')} = q_k b_{jk}^{(s')}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\rho})$ и $N\times 3$-матрицей $B_l^{(s)} = q_k a_{k;l}^{(s)}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\rho})$ Система уравнений (1) с операторами (2), (3) называется гиперболической в области $\{\langle\boldsymbol{q},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\rho}\rangle \in \Omega : \Omega\subset\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^N\}$, где $\boldsymbol{q} = \langle q_j; j\in\{1,2,3\}\rangle\in\mathbb{R}^3$, если матрица является диагонализуемой и все ее собственные числа $\omega^{(m)}\equiv\omega^{(m)}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q},\boldsymbol{\rho})$, $m=1\div N+3$ вещественны. Система (1) гиперболическая, если $\Omega=\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^N$.

Блоки матрицы $\mathcal{T}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\rho})$ в терминах коэффициентных функций имеют вид $T_{jl}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\rho}) = f_1 q_j u_l + f_2 u_j q_l + f_3\delta_{jl}\xi + f_4\xi u_j u_l$, $A_j^{(s')} = g_1^{(s')}q_j + g_2^{(s')}\xi u_j$, $B_l^{(s)} = q_l f_1^{(s)} + \xi u_l f_2^{(s)}$, где $\xi = (\boldsymbol{q},\boldsymbol{u})$. Основной результат работы состоит в доказательстве следующего утверждения.

Теорема. *Для того чтобы система квазилинейных уравнений (5), (6) с дифференциальными операторами первого порядка из класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3,1,N)$ была гиперболической необходимо и достаточно выполнение для коэффициентов этой системы следующей совокупности условий:* 1) $f_2^2 + \sum_s (f_1^{(s)})^2 \neq 0$; 2) $f_1^2 + \sum_s (g_1^{(s)})^2 \neq 0$;

3) $f_1 f_2 u^2 + \sum_s g_1^{(s)} f_1^{(s)} > 0$; 4) *диагонализуемость* $(N+1)\times(N+1)$*-матрицы*

$$\mathcal{R}_g \equiv \begin{pmatrix} f_2+f_3+f_4u^2 & | & g_2^{(s')} \\ ----- & & --- \\ f_1^{(s)} + u^2 f_2^{(s)} & | & g^{(s,s')}\end{pmatrix}$$

и вещественность всех ее собственных чисел.

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Гилев А.В.
Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Россия;
toshqaaa@gmail.com

В работе рассмотрена задача Гурса с нелокальными интегральными условиями для гиперболического уравнения с доминирующей смешанной производной. Интегральные условия рассматриваемой задачи являются нелокальными условиями второго рода, в связи с этим, для исследования разрешимости задачи, используется метод, который заключается в сведении поставленной нелокальной задачи к классической задаче Гурса, но для нагруженного уравнения. В работе получены условия, выполнение которых гарантирует существование единственного решения поставленной задачи. Основным инструментом доказательства являются априорные оценки, полученные в работе.

Ключевые слова: неклассическая задача, нелокальные условия, нагруженное уравнение, задача Гурса, интегральные условия второго рода, существование и единственность решения, метод последовательных приближений, редукция.

ON THE SOLVABILITY OF A NONLOCAL PROBLEM FOR A HYPERBOLIC EQUATION IN A CHARACTERISTIC DOMAIN

Gilev A.V.
Samara National Research University named after academician S.P. Korolev, Samara, Russia;
toshqaaa@gmail.com

In this article, we consider the Goursat problem with nonlocal integral conditions for a hyperbolic equation with a dominant mixed derivative. In our problem, the integral conditions are nonlocal conditions of the second *kind, therefore, to investigate the solvability of the problem, we propose method, which consists in reducing the stated nonlocal problem to the classical Goursat problem, but for a loaded equation. In this article, we obtain conditions that guarantee the existence of a unique solution of the problem. The main instrument of the proof is the a priori estimates obtained in the paper.*

Key words: non-classical problem, non-local conditions, loaded equation, Goursat problem, integral conditions of the second kind, existence and uniqueness of a solution, method of successive approximations, reduction.

Рассмотрим в $Q = (0,a) \times (0,b)$ следующую нелокальную задачу: найти решение уравнения

$$u_{xy} + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = f(x,y), \tag{1}$$

удовлетворяющее нелокальным условиям

$$u(x,0) + \int_0^b K_2(x,y)udy = \varphi(x), \quad u(0,y) + \int_0^a K_1(x,y)udx = \psi(y). \tag{2}$$

Будем предполагать, что коэффициенты уравнения, его правая часть, а также функции $K_i(x,y)$ достаточно гладкие. В силу того, что условия (2) являются нелокальными, мы не можем воспользоваться известными результатами о разрешимости задачи Гурса.

Одним из методов решения задач с нелокальными условиями является метод редукции задачи с нелокальными условиями к задаче с классическими граничными условиями, но для нагруженного уравнения. Этим методом мы и воспользуемся.

Введем новую неизвестную функцию

$$v(x,y) = u(x,y) + \int_0^a K_1(x,y)u(x,y)dx + \int_0^b K_2(x,y)u(x,y)dy, \tag{3}$$

предполагая, что $u(x,y)$ является решением задачи (1) – (2) . Тогда легко видеть, что в силу (2) , а также подставляя $u(x,y)$ из (3) в (1) , получим задачу Гурса для нагруженного гиперболического уравнения с доминирующей смешанной производной

$$v_{xy} + A(x,y)v_x + B(x,y)v_y + C(x,y)v = f(x,y) + P(x,y,u), \tag{4}$$

$$v(x,0)=\varphi(x),\ \ v(0,y)=\psi(y), \tag{5}$$

где

$$P(x,y,u)=A(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^b K_2(x,y)u(x,y)dy+B(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^a K_1(x,y)u(x,y)dx+$$

$$+C(x,y)(\int\limits_0^a K_1(x,y)u(x,y)dx+\int\limits_0^b K_2(x,y)u(x,y)dy).$$

Теорема 1

Пусть выполняются следующие условия

$$A,B,C\in C(\overline{Q}),K_i\in C^1(\overline{Q}),f(x,y)\in L_2(Q),\sqrt{2(a+b)\kappa}<1$$

$$K_1(x,0)=K_2(y,0)=0.$$

Тогда существует единственное решение задачи Гурса $(4)-(5)$.

Доказательство Сведем $(4)-(5)$ к системе интегральных уравнений. Пусть v - решение задачи Гурса и положим

$$v_x=\nu(x,y),\ \ v_y=w(x,y)\Rightarrow v_{xy}=\nu_y(x,y),\ \ v_{yx}=w_x(x,y).$$

Тогда, в силу (4) получим

$$\begin{cases} \nu_y=f+P-A(x,y)\nu(x,y)-B(x,y)w(x,y)-C(x,y)v(x,y), \\ w_x=f+P-A(x,y)\nu(x,y)-B(x,y)w(x,y)-C(x,y)v(x,y), \\ v_y=w(x,y). \end{cases} \tag{6}$$

Проинтегрировав каждое из соотношений (6), приходим к системе интегральных уравнений

$$\begin{cases} \nu(x,y)=\varphi\prime(x)+\int\limits_0^y(f+P-A\nu-Bw-Cv)dy, \\ w(x,y)=\psi\prime(y)+\int\limits_0^x(f+P-A\nu-Bw-Cv)dx, \\ v(x,y)=\varphi(x)+\int\limits_0^y wdy. \end{cases} \tag{7}$$

Нетрудно показать, что система (7) эквивалентна $(4)-(5)$.

Для обоснования разрешимости (7) , будем искать приближенное решение (7) из соотношений

$$\nu_0=\varphi'(x),\ \ w_0=\psi'(y),\ \ v_0=\varphi(x),$$

$$\begin{cases} \nu_n(x,y)=\nu_0+\int\limits_0^y(f-A\nu-Bw-Cv)dy+\int\limits_0^y P(x,y,u_n)dy,\\ w_n(x,y)=w_0+\int\limits_0^x(f-A\nu-Bw-Cv)dx+\int\limits_0^x P(x,y,u_n)dx,\\ v_n(x,y)=v_0+\int\limits_0^y w_{n-1}dy. \end{cases}$$

Для доказательства сходимости последовательностей ν_n,w_n,v_n получены априорные оценки, несмотря на возникшие сложности с нагруженным слагаемым $P(x,y,u)$ в правой части (8) . Благодаря полученным оценкам, удалось доказать, что пределы ν,w,v последовательностей ν_n,w_n,v_n являются решением системы (7) , причем единственным.

Для обоснования разрешимости поставленной задачи необходимо убедиться в разрешимости (3) . Применяя принцип сжатых отображений, получим, что если

$$\sqrt{2(a+b)(\kappa_1+\kappa_2)}<1,$$

где

$$\kappa_1=\max_{[0,b]}\int\limits_0^a K_1^2(x,y)dx,\quad \kappa_2=\max_{[0,a]}\int\limits_0^b K_2^2(x,y)dy,$$

то (3) разрешимо, а значит можно выразить $u(x,y)$ через $v(x,y)$.

Так как задачи (1)−(2) и (4)−(5) эквивалентны, то это означает, что исходная задача однозначно разрешима.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пулькина Л.С.* Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. Самара: Издательство "Самарский университет 2012. 194 с.

2. *Пулькина Л.С., Кожанов А.И.* О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. № 9 (42). С. 1166–1179.

3. *Пулькина Л.С.* О разрешимости в L_2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 2000. № 2 (36). С. 279–280.

4. *Нахушева З.А.* Об одной нелокальной задаче для уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. 1986. № 1 (22). С. 171–174.

УДК 517.95

О ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛООБМЕНА

Дехконов Ф.Н.
Национальный Университет Узбекистана, г. Ташкент, Узбекистан;
f.n.dehqonov@mail.ru

Параметр управления равен температуре на некотором участке границы рассматриваемой области. Найдена оценка минимального времени достижения заданной средней температуры в некоторой подобласти.

Ключевые слова: Минимальное время, интегральное уравнение, граничное управление, начально-краевая задача, допустимое управление.

ON THE TIME-OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR HEAT TRANSFER EQUATION

Dekhkonov F.N.
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
f.n.dehqonov@mail.ru

The boundary control problem for heat equation in a right rectangle domain is considered. The control parameter is equal to the temperature on some part of the border of the considered domain The estimate of a minimal time for achieving the given average temperature over some subdomain is found.

Key words: Minimal time, integral equation, boundary control, initial-boundary problem, admissible control.

Consider the following mathematical model of the heat conduction process along the domain $\Omega = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < a,\, 0 < y < b\}$:

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}, \quad (x, y) \in \Omega \quad t > 0, \tag{1}$$

with boundary conditions

$$u|_{x=0} \;=\; \varphi(y)\mu(t), \quad u|_{x=a} \;=\; \psi(y)\mu(t), \quad 0 < x < a, \tag{2}$$

$$u|_{y=0} \;=\; 0, \quad u|_{y=b} \;=\; 0, \quad 0 < y < b, \quad t > 0, \tag{3}$$

and initial condition

$$u(x, y, 0) \;=\; 0, \quad 0 \le x \le a, 0 \le y \le b, \tag{4}$$

Let $M > 0$ be some given constant. We say that the function $\mu(t)$ is an *admissible control* if this function is piecewise smooth on the half-line $t \ge 0$ and satisfies the following constraints

$$\mu(0) = 0, \quad |\mu(t)| \;\le\; M, \quad t > 0.$$

Assume that the functions $\varphi(y), \psi(y) \in W_2^2[0, b]$ is smooth and satisfies conditions

$$\varphi(0) \;=\; \varphi(b) \;=\; 0, \quad \psi(0) \;=\; \psi(b) \;=\; 0, \quad \varphi_n \ge \psi_n \ge 0, \quad 0 \le y \le b,$$

where

$$\varphi_n = \frac{2}{b}\int\limits_0^b \varphi(y)\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy, \quad \psi_n = \frac{2}{b}\int\limits_0^b \psi(y)\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy.$$

Problem A. *Given constants $\alpha, \beta \ge 1$ and $\theta > 0$ Problem A consists in looking for the minimal value of $T > 0$ so that for $t > 0$ the solution $u(x, y, t)$ of the initial-boundary value problem (1)-(4) with some admissible control $\mu(t)$ exists and for all $t \ge T$ satisfies the equation*

$$\int\limits_0^{b/\alpha}\int\limits_0^{a/\beta} u(x, y, t)\,dx\,dy \;=\; \theta, \quad t \ge T. \tag{5}$$

Set

$$\rho_{mn} \;=\; \frac{8\,b}{a\pi\,n}\Big(\varphi_n - (-1)^m\psi_n\Big)\sin^2\frac{m\pi}{2\beta}\sin^2\frac{n\pi}{2\alpha}, \quad m,\, n = 1, 2, ... \tag{6}$$

Theorem 1. *Let*

$$0 < \theta < \frac{\rho_{11}\, M\, a^2 b^2}{\pi^2 (a^2+b^2)}. \tag{7}$$

Set

$$T_0 = -\frac{a^2\, b^2}{\pi^2(a^2+b^2)} \ln\left(1 - \frac{\theta\, \pi^2 (a^2+b^2)}{\rho_{11}\, M\, a^2 b^2}\right). \tag{8}$$

Then a solution T_{min} of the Problem A exists and the estimate $T_{min} \leq T_0$ is valid.

Proposition 1. *Let $\mu(t)$ be a smooth function on the half-line $t \geq 0$ and $\varphi,\, \psi \in W_2^2[0, b]$. Then the function*

$$u(x,y,t) \;=\; \int\limits_0^t \mu(s) \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} e^{-\lambda_{mn}(t-s)} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}\, ds,$$

is the solution of the initial-boundary value problem (1)-(4), where

$$c_{mn} = \frac{2m\pi}{a^2}\left(\varphi_n - (-1)^m \psi_n\right),\;\; \lambda_{mn} = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2,\;\; m,n = 1,2,...$$

Set

$$B(t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \rho_{mn}\, e^{-\lambda_{mn} t},$$

where ρ_{mn} defined by (6).

Then we get main integral equation

$$\int\limits_0^t B(t-s)\mu(s)ds = \theta(t), \quad t > 0.$$

We introduce a specific heating as

$$Q(t) = \int\limits_0^t B(t-s)ds = \int\limits_0^t B(s)ds = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_{mn}}{\lambda_{mn}}\left(1 - e^{-\lambda_{mn} t}\right).$$

It is clear that $Q(0) = 0$ and $Q'(t) = B(t) \geq 0$.

Set

$$Q^* = \lim_{t\to\infty} Q(t) = \int\limits_0^\infty B(s)ds.$$

Obviously, the average temperature of Ω in the case where the heater is acting with unit load cannot exceed Q^* . (see, e.g. [1]-[2])

Proposition 2. *Let*

$$0 < \theta < MQ^*. \tag{9}$$

Then there exist $T > 0$ and a real-valued measurable function $\mu(t)$ so that $|\mu(t)| \leq M$ and the following equality

$$\int\limits_0^T B(T-s)\mu(s)ds = \theta, \tag{10}$$

is valid.

Remark. It is clear that the value T , which was found in Proposition 2, gives a solution to the problem. Namely, T is the root of the equation

$$Q(T) = \frac{\theta}{M}. \tag{11}$$

Proposition 3. *Let*

$$0 < \theta < \frac{\rho_{11}\, M\, a^2 b^2}{\pi^2(a^2+b^2)}. \tag{12}$$

Then there exists $T > 0$ so that

$$T < -\frac{a^2b^2}{\pi^2(a^2+b^2)} \ln\left(1 - \frac{\theta\,\pi^2(a^2+b^2)}{\rho_{11}\, M\, a^2b^2}\right) \tag{13}$$

and the equality (14) is fulfilled.

Proposition 4. *Let $T > 0$ satisfies the equality (11) and condition (12).*

Then there exist $T_1 > T$ and a measurable real-valued function $\mu(t)$ so that $|\mu(t)| \leq M$ and the following equality

$$\int\limits_0^{b/\alpha}\int\limits_0^{a/\beta} u(x,y,t)\, dx\, dy = \theta, \quad T \leq t \leq T_1,$$

is valid.

REFERENCES

1. *Albeverio S., Alimov Sh.A.* On one time-optimal control problem associated with the heat exchange process, Applied Mathematics and Optimization, **47** (1), 58–68 (2008).

2. *Alimov Sh.A.* On a control problem associated with the heat transfer process. Eurasian Mathematical Journal, (2010) no. 1, pp. 17-30.

3. *Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uraltseva N.N.* Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type (Russian). Nauka, Moscow, 1967.

УДК 517.95

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Дюжева А.В. [1] **, Кожанов А.И.** [2]

[1] *Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия;*

[2] *Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, Россия,*

aduzheva@rambler.ru, kozhanov@math.nsc.ru

Boundary value problems with integral conditions for some classes of non-stationary differential equations

A.V. Dyuzheva [1] **, A.I. Kozhanov** [2]

[1] *Samarsk State Technical University, Samara, Russian Federation;*

[2] *S. L. Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russian Federation*

Samarsk State Technical University, Samara, Russian Federation;

aduzheva@rambler.ru, kozhanov@math.nsc.ru

В докладе излагаются новые результаты о разрешимости нелокальных задач с интегральными по пространственной переменным условиями для некоторых классов

- параболических дифференциальных уравнений второго и высокого порядков;
- гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка;
- дифференциальных уравнений соболевского типа;
- дифференциальных уравнений с кратными характеристиками;

Для всех изучаемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений, имеющих все обобщенные по С.Л.Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

Работа выполнена по плану госзадания "Программа фундаментальных исследований СамГТУ в области химических наук и материаловедения тема № FSSE-2020-0005.

УДК 517.9

О НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ С y-ИНТЕГРАЛОМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Воронова Ю.Г. [1] **, Жибер А.В.** [2]
[1] *Уфимский государственный авиационный технический университет, г. Уфа, Россия;*
[2] *Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия;*
mihaylovaj@mail.ru, zhiber@mail.ru

В работе рассмотрен класс нелинейных гиперболических уравнений, обладающих y –интегралом второго порядка и x –интегралами первого, второго и третьего порядков. Проведена их классификация. Также приведены дифференциальные подстановки, связывающие уравнения Лэне.

Ключевые слова: инварианты Лапласа, x – и y –интегралы, дифференциальные подстановки.

ON NONLINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS WITH A SECOND ORDER y-INTEGRAL

Voronova J.G. [1] **, Zhiber A.V.** [2]
[1] *Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia;*
[2] *Institute of Mathematics with the Computing Center of the UFIC RAS , Ufa, Russia;*
mihaylovaj@mail.ru, zhiber@mail.ru

The paper considers a class of nonlinear hyperbolic equations with a second order y - integral and x - integrals of the first, second and third orders. Their classification is carried out. Differential substitutions connecting the Laine equations are also given.

Key words: Laplace invariants, x - and y - integrals, differential substitutions.

Для полной классификации нелинейных гиперболических уравнений

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

необходимо провести классификацию уравнений специального класса, которые не были исследованы в работе [1], а именно следующих уравнений:

$$u_{xy} = \frac{p - \varphi_u}{\varphi_{u_y}} u_x + \frac{q}{\varphi_{u_y}} \sqrt{u_x}. \tag{1}$$

Здесь p, q – функции переменных x, y, u, а φ – переменных x, y, u, u_y.

Так, в 1926 г. Лэне построил два уравнения (см. [2]–[4])

$$u_{xy} = \left(\frac{u_y}{u - x} + \frac{u_y}{u - y} \right) u_x + \frac{u_y}{u - x} \sqrt{u_x}, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} u_{xy} = 2 \left[(u+Y)^2 + u_y + (u+Y)\sqrt{(u+Y)^2 + u_y} \right] \times \\ \times \left[\tfrac{\sqrt{u_x} + u_x}{u - x} - \tfrac{u_x}{\sqrt{(u+Y)^2 + u_y}} \right], \end{aligned} \tag{3}$$

$Y = Y(y)$, обладающие y-интегралом второго порядка $\bar{w} = \bar{w}(x, y, u, u_y, u_{yy})$ и x-интегралом третьего порядка $w = w(x, y, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx})$ ($D\bar{w} = 0$, $\bar{D}w = 0$). Здесь D (соответственно, $\bar{D}$)–оператор полного дифференцирования по x (соответственно, по y).

Отметим, что уравнения (2) и (3) содержатся в классе уравнений (1).

В работе [5] доказано следующее утверждение:

Лемма. *Если уравнение (1) обладает y -интегралом второго порядка, то функция φ не зависит от переменной x .*

Следовательно y -интеграл представим в виде

$$\bar{W} = \bar{D}r + \beta(x, y, r)$$

и поэтому дифференциальная подстановка

$$r = \varphi(y, u, u_y) - h(x, y, u), \; p = h_u,$$

решения уравнения (1) переводит в решения уравнения

$$D\bar{D}r + D\beta = 0. \tag{4}$$

Исследуем уравнение (4), для этого сделаем замену $r \rightarrow u$, $\beta \rightarrow -p$. Тогда уравнение (4) перепишется в виде

$$D\bar{D}u = Dp, \;\; p = p(x, y, u). \tag{5}$$

Отметим, что y -интеграл уравнения (5) задается формулой

$$\bar{w} = \bar{D}u - p.$$

Для определения x -интегралов уравнения (5) используем инварианты Лапласа линеаризованного уравнения. Если уравнение интегрируемо по Дарбу, то ряд инвариантов Лапласа линеаризованного уравнения обрывается с двух сторон. Доказано следующее утверждение.

Теорема. *Если в уравнение (5) инвариант $h_{-1} = 0$, то оно принимает вид*

$$D\bar{D}u = D\left(a(y)u + c(x, y)\right),$$

здесь $a(y)$, $c(x, y)$ –произвольные функции. Данное уравнение имеет x -интеграл

$$w = u_1 e^{-\int a(y)dy} - \int \left[c_x e^{-\int a(y)dy}\right] dy.$$

Если инвариант $h_{-2}=0$, то уравнение (5) принимает вид

$$D\bar{D}u = e^u Du,$$

с интегралом

$$w = \frac{u_2}{u_1} - u_1,$$

либо

$$D\bar{D}u = D\left(a(x,y)\cdot u\right), \tag{6}$$

здесь функция $a(x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$a_{xy} - 2a\cdot a_x = \kappa(y)\cdot a_x.$$

x-интеграл уравнения (6) задается формулой

$$w = Au_2 + B,$$

где $A = e^{-\int a dy}$, $B = -A\frac{a_{xx}}{a_x}u_1$.

Если инвариант $h_{-3}=0$, то (5) принимает вид

$$D\bar{D}u = D(e^u + a(x,y)),$$

$$w = \frac{1}{a_{xx} - a_x z}\cdot\left\{a_x\left(z_1 + z^2\right) - a_{xxx}\right\} - 3\int a_x(x,y)dy,$$

здесь $z = \frac{u_2}{u_1} - u_1$, функция $a(x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$a_{xy} + 2a\cdot a_x = a_x\varepsilon(y),$$

либо

$$D\bar{D}u = uDu,$$

в этом случае x–интеграл последнего уравнения имеет вид

$$w = \frac{u_3}{u_1} - \frac{3}{2}\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2.$$

либо

$$D\bar{D}u = D\left(a(x,y)\cdot u\right), \tag{7}$$

здесь функция $a(x,y)$ удовлетворяет соотношению

$$D\left[\frac{F_y}{F} - 3a + \frac{2a_{xy}}{a_x}\right] = 0,$$

$$F = 2a_x - \frac{a_{xxy}}{a_x} + \frac{a_{xy}a_{xx}}{a_x^2},$$

x –интеграл уравнения (7) представим в виде

$$w = e^{-b}u_3 - \frac{E}{a_x F}e^{-b}\left(a_x u_2 - a_{xx}u_1\right) - e^{-b}\frac{a_{xxx}}{a_x}u_1,$$

где $b_y = a$, $E = 6a_{xx} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_{xxx}}{a_x}\right)$,
либо

$$D\bar{D}u = D\left(e^u - H(y)e^{-u}\right),$$

где x –интеграл

$$w = \frac{u_3}{u_1} - \frac{3}{2}\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 - \frac{1}{2}u_1^2.$$

Также в работе показано, что уравнения Лэне (2), (3) связаны дифференциальными подстановками. Для этого уравнение (3) перепишем виде

$$v_{xy} = 2\left[(v+Y)^2 + v_y + (v+Y)\sqrt{(v+Y)^2 + v_y}\right] \times$$

$$\times \left[\frac{\sqrt{v_x} + v_x}{v - x} - \frac{v_x}{\sqrt{(v+Y)^2 + v_y}}\right] \tag{8}$$

Тогда уравнения (2) и (8) связаны преобразованием Беклунда:

$$u_x = \left(\frac{u-x}{v-x}(\sqrt{v_x}+1) - 1\right)^2,$$

$$u_y = 2(x-u)(u+Y(y)) \cdot \left(\frac{v + Y(y) + \sqrt{v_y + (v+Y(y))^2}}{v - x}\right).$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00006, https://rscf.ru/project/21-11-00006/.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жибер А.В., Соколов В.В.* Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа // УМН. 2001. Т. 56. № 1. С. 63–106.

2. *Капцов О.В.* Методы интегрирования уравнений с частными производными // Москва: ФИЗМАТЛИТ. 2009. 182 с.

3. *Капцов О.В.* О проблеме классификации Гурса // Программирование. 2012. № 2. С. 68–71.

4. *Laine M.E.* Sur J'application de la methode de Darboux aux equations $s = f(x, y, z, p, q)$ // Comptesrendus. V. 182. 1926. P. 1126–1127.

5. *Жибер А.В., Юрьева А.М.* Гиперболические уравнения лиувиллевского типа специального класса// Дифференциальные уравнения. Математическая физика. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 137. ВИНИТИ РАН. Москва. 2017. С. 17–25.

УДК 517.9

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Зикиров О.С., Сагдуллаева М.М.
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека
zikirov@yandex.ru, e-mail sagdullayevam@mail.ru

Различные классы нагруженных уравнений рассмотрены в работах [1]–[3]. Как близкие к настоящей работе, отметим работы [3], которые посвящены исследованию некоторых классов нагруженных уравнений параболического типа.

В области $D = (x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T$ рассмотрим нагруженное параболическое уравнение вида

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t) - \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} \qquad (1)$$

где $f(x, t)$ – заданные функции.

Особенностью рассматриваемого уравнения является то, что порядок производной в нагруженном слагаемом равен порядку дифференциальной части оператора. Доказано, что рассматриваемая в работе нелокальная граничная задача является корректной.

Для уравнения (1) рассматривается следующая нелокальная задача: *требуется найти в области D решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному*

$$u(x,t) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

граничным

$$u_x(0,t) = \psi_1(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

и интегральным условием

$$\int\limits_0^l u(x,t)dx = \int\limits_0^t h(t,\tau)u_x(l,\tau)d\tau + \psi_2(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

где $\varphi(x)$, $\psi_1(t), (i=1,2)$; $h(t,\tau)$ – заданные, непрерывные при $x \in [0,l]$, $t \in [0,T]$, $\tau \in [0,t]$ соответственно функции, удовлетворяющие условиям соглосования:

$$\varphi'(0) = \psi_1(0), \quad \int\limits_0^l \varphi(x)dx = \psi_2(0).$$

Определение. Регулярным в области D решением уравнения (1) называется действительная функция $u(x,t)$, из класса $C^{2,1}(\overline{D})$, удовлетворяющая ему в обычном смысле.

Основным результатом данной работы является следующая теорема о разрешимости нелокальной задачи (1)–(4).

Теорема. Пусть $\varphi(x) \in C[0,l]$, $f(x,t) \in C(\overline{D})$, $\psi_1(t) \in C[0,T]$, $\psi_2(t) \in C^1[0,t]$ и $h(t,\tau) \in C^1([0,T])$, $h(t,\tau) \neq 0$ для всех $t \in C[0,T]$. Тогда решение задачи (1)–(4) существует и единственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их приложения. – М.: Наука. 2012, 232 с.

2. *Кожанов А.И.,* Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера.// Дифференц. уравнения, 2004, Т. 40, №6. – С. 763–774.

3. *Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* Нагруженные уравнения – как возмущения дифференциальных уравнения. – Алматы. Гылым. 2010, 334 с.

УДК 533.2; 534.12

ВЛИЯНИЕ ДАВЛЕНИЯ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ НА НИЗШУЮ ЧАСТОТУ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЫ

Ильгамов М.А., Хакимов А.Г.
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН,
г. Уфа, Россия;
ilgamov@anrb.ru, hakimov@anrb.ru

Определяется низшая частота изгибных колебаний пластины, контактирующей с газом. Дается вывод выражения распределенной поперечной нагрузки на пластину в предположении ее цилиндрического изгиба. На поверхности пластины действуют давления сред разной плотности. Определяется влияние на изгиб взаимодействия среднего давления и изменения кривизны срединной поверхности, а также присоединенной массы газовой среды.

Ключевые слова: тонкая пластина, газ, плотность, давление, присоединенная масса, спектр частот.

THE EFFECT OF PRESSURE OF AMBIENT MEDIUM ON LOW VIBRATION FREQUENCY OF THE PLATE

Ilgamov M.A., Khakimov A.G.
Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa, Russia;
ilgamov@anrb.ru, hakimov@anrb.ru

The frequency of bending vibrations of a plate in contact with a gas is determined. The expression of the distributed transverse load on the plate is derived under the assumption of its cylindrical bending. On the surface of the plate, the pressures of media of different densities act. The influence of the interaction of the average pressure and changes in the *curvature of the median surface, as well the attached mass of the gas medium on the bending is determined.*

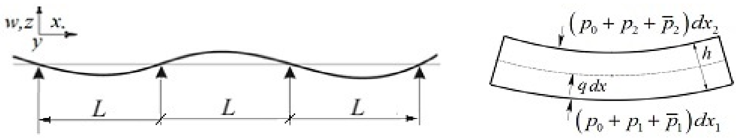
Key words: thin plate, gas, density, pressure, attached mass, frequency spectrum.

1. Определение спектра частот пластин и оболочек, контактирующих с жидкостью и газом, имеет большое значение [1-3]. Этой теме посвящена обширная литература. К ней примыкает также серия работ по колебаниям тонкостенных тел, не контактирующих с внешней средой. В [1-3] не учитывается эффект среднего давления. В [4] определяется спектр частот двухопорного резонатора с учетом взаимодействия среднего избыточного давления на поверхности резонатора и кривизны осевой линии, а также действия осевой нагрузки. В данной работе определяется низшая собственная частота пластинки с учетом взаимодействия среднего избыточного давления на ее поверхности и кривизны осевой линии, а также действия присоединенной массы газовой среды. В отличие от постановки задач в работах [1-3], где задается частота и определяется волновое число, здесь конструктивно задается длина полуволны и определяется частота. Такая постановка характерна для резонаторов. Представляет интерес вопрос о взаимном влиянии эффекта среднего давления и известного из литературы эффекта присоединенной массы жидкости на деформацию пластины. В предположении цилиндрического изгиба тонкой пластины, рассматривается уравнение

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q, \quad D = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}, \tag{1}$$

где E, ν , ρ – модуль упругости, коэффициент Пуассона, плотность материала, h – толщина пластины, $w(x,t)$ – прогиб, x, t – координата, время, q – поперечная распределенная нагрузка.

На нижнюю и верхнюю поверхность пластины действуют давления p_0+p_1 и p_0+p_2 жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 (рис. 1a). Здесь p_0 - давление сборки, в частности, атмосферное давление, действующее на все поверхности, p_1 , p_2 - избыточные давления. Они не зависят от изгиба. При определении нагрузки q исходим из предположения, что ρ_1 , ρ_2 и p_1 , p_2 остаются постоянными при изгибе пластины.



a b

Рис. 1. (a) Пример крепления пластины. (b) Элемент dx срединной поверхности изогнутой пластины.

2. Возникающие в результате движения пластины давления обозначим через $\bar{p}_1$ и $\bar{p}_2$. Уравнения динамики сжимаемой среды относительно потенциала скорости $\varphi(x,\ z,\ t)$ имеют вид [1-3]

$$\frac{\partial^2\varphi_{1,2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_{1,2}}{\partial z^2} - \frac{1}{c_{1,2}^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi_{1,2}}{\partial t^2} = 0, \bar{p}_{1,2} = -\rho_{1,2}\frac{\partial\varphi_{1,2}}{\partial t}, c_{1,2}^2 = \kappa_{1,2}\frac{p_{1,2}}{\rho_{1,2}}, \tag{2}$$

где, $c_{1,2}$ – скорость звука, $\kappa_{1,2}$ – коэффициент адиабаты. В отличие от случая несжимаемой жидкости здесь давление и плотность не являются независимыми, а связаны изотермическим законом.

Условия на поверхностях

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t},\ \left(z = -\frac{h}{2} + w\right),\ \ \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t},\ \left(z = \frac{h}{2} + w\right). \tag{3}$$

На большом удалении от поверхности возмущения от пластины исчезают

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = 0,\ \ (z = -\infty),\ \ \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = 0,\ \ (z = \infty). \tag{4}$$

Элементарные длины dx_1, dx_2 нижней и верхней поверхностей, выраженное через длину dx срединной поверхности пластины, равны (рис. 1b)

$$dx_1 = \left(1 + \varepsilon_x\left(-\frac{h}{2}\right)\right)dx,\ dx_2 = \left(1 + \varepsilon_x\left(\frac{h}{2}\right)\right)dx, \tag{5}$$

где деформации в соответствии с гипотезами Кирхгоффа

$$\varepsilon_x\left(-\frac{h}{2}\right) = \frac{h}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ \varepsilon_x\left(\frac{h}{2}\right) = -\frac{h}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{6}$$

Распределенная сила q определяется по формуле

$$qdx = (p_0 + p_1 + \bar{p}_1)\, dx_1 - (p_0 + p_2 + \bar{p}_2)\, dx_2. \tag{7}$$

Предполагаем, что пластина неограниченной длины по оси x опирается на опоры, расположенные на равных расстояниях L и допускающие свободный поворот. Рассмотрим частный случай одинаковых сред при одинаковых давлениях ($\rho_1 = \rho_2$, $p_1 = p_2$, $c_1 = c_2$). Примем

$$w = W \sin \beta x \exp(i\omega t)\,, \varphi_{1,2} = \Phi_{1,2}(z) \sin \beta x \exp(i\omega t)\,, \beta = \pi/L. \tag{8}$$

При записи (8) предполагаем, что области, занятые жидкостями, простираются неограниченно, опоры не препятствуют свободному перетеканию жидкости вдоль пластины в направлении оси x . Тогда из волнового уравнения (7) следует

$$\Phi_{1,2} = A_{1,2} e^{kz} + B_{1,2} e^{-kz}, \quad k^2 = \beta^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} > 0. \tag{9}$$

Член $\exp(kz + i\,\omega\,t)$ описывает колебания газа под пластинкой (в области 1), а в области 2 – возрастающие колебания газа, что не соответствует условию (4). Поэтому последние исключаем из рассмотрения в этой задаче. Итак

$$\varphi_1 = A_1 \mathrm{sin}\beta x \exp(i\omega t + kz)\,, \quad \varphi_2 = B_2 \mathrm{sin}\beta x \exp(i\omega t - kz)\,. \tag{10}$$

Как показано выше, при определении распределенной нагрузки q необходимо учитывать условия при $z = \pm h/2$, а при определении $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$ на поверхностях пластины и удовлетворении условий (4) в линейной задаче вместо $z = \pm h/2 + w$ можно принять $z = 0$. Тогда из условий (4) $A_1 = i(\omega/k)W$, $B_2 = -i(\omega/k)W$ и

$$\bar{p}_1 = \rho_1 \frac{\omega^2}{k} W \sin \beta x e^{i\omega t}, \quad \bar{p}_2 = -\rho_2 \frac{\omega^2}{k} W \sin \beta x e^{i\omega t}. \tag{11}$$

Правая часть уравнения (1) равна ($\rho_1 = \rho_2$, $p_1 = p_2$)

$$q = (p_0 + p_1)\, h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{p}_1 - \bar{p}_2 = p_1 h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{2\rho_1 \omega^2}{k} W \sin \beta x e^{i\omega t}. \tag{12}$$

Подставив в (1) выражение w и q из (8) и (12), получим для $p_0 = 0$

$$D\beta^4 - \rho h \omega^2 + p_1 h \beta^2 - \frac{2\rho_1 \omega^2}{k} = 0, \omega_0^2 = \frac{D\beta^4}{\rho h}, k^2 = \beta^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}, \beta = \frac{\pi}{L}. \tag{13}$$

Из (13) следует

$$1 - Z + \alpha - \frac{\mu Z}{\sqrt{1 - \eta \mathrm{Z}}} = 0, \alpha = \frac{p_1 \beta^2}{\rho \omega_0^2}, \mu = \frac{2\rho_1}{\rho h \beta}, \eta = \frac{\omega_0^2}{c_1^2 \beta^2}, Z = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}. \quad (14)$$

На рис. 2 приводится зависимость первой частоты изгибных колебаний пластинки от давления для разных газов. Из рис. 2 видно, что с ростом давления собственная частота колебаний возрастает. А с увеличением плотности газа происходит уменьшение собственной частоты изгибных колебаний.

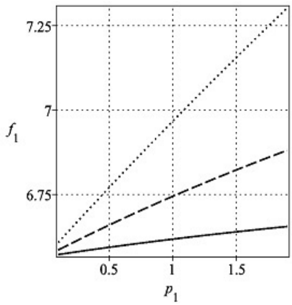


Рис. 2. Зависимость первой частоты изгибных колебаний пластинки f_1 (МГц) от давления p_1 (МПа) для разных газов: $\rho_1 = 0.1785$ (гелий), 1.2928 (воздух), 1.9768 (двуокись углерода) кг/м ^{3} (пунктирная, штриховая, сплошная линии соответственно).

3. Влияние контактирующей среды на низшую частоту колебаний является значительным для весьма тонких пластин и пленок с низким модулем упругости. Учет его необходим особенно в случае тонких элементов микро - и наноразмеров. С ростом давления собственная частота колебаний возрастает. А с увеличением плотности газа происходит уменьшение собственной частоты изгибных колебаний. Эти результаты могут быть использованы при моделировании колебаний пластинок в сжимаемой среде, в том числе микро - и наноразмеров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гонткевич В.С.* Собственные колебания оболочек в жидкости. Киев: Наукова думка, 1964. 102 с.

2. *Ильгамов М.А.* Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 180 с.

3. *Попов А. Л., Чернышев Г. Н.* Механика звукоизлучения пластин и оболочек. М.: Физматлит. 1994. 208 с.

4. *Ilgamov M.A., Khakimov A.G.* Influence of Pressure on the Frequency Spectrum of Micro and Nanoresonators on Hinged Supports // Journal of Applied and Computational Mechanics. 2021. Vol. 7. No. 2. P. 977–983.

УДК 517.95

ASYMPTOTIC FORMULAS OF FOURTH ORDER STURM-LIOUVILLE OPERATOR WITH PERIODIC AND CONJUGATE BOUNDARY CONDITIONS

Cabri O.
Artvin Coruh University, Artvin, Turkey;
olguncabri@gmail.com

1. Introduction

In this study, it is studied spectral properties operator $l(y)$

$$l(y) = \begin{cases} l_1(y_1), & x \in (-1,0), \\ l_2(y_2), & x \in (0,1), \end{cases} \tag{1}$$

generated by fourth order differential expression

$$l_1(y_1) = y_1^{(4)} + q_1(x)y_1, \;\; l_2(y_2) = y_2^{(4)} + q_2(x)y_2,$$

where $q_1(x) \in C^4[-1,0)$ and $q_2(x) \in C^4(0,1]$ complex valued functions. Boundary conditions of the operator (1) are considered periodic boundary condtions

$$U_k(y) \equiv U_{k,-1}(y) + U_{k,1}(y) = y^{(k)}(-1) - y^{(k)}(1) = 0, \;\; k = 0,1,2,3 \quad (2)$$

and conjugate boundary conditions at $x = 0$

$$V_k(y) \equiv U_{k,-0}(y) + V_{k,+0}(y) = y^{(k)}(-0) - y^{(k)}(+0) = 0. \; k = 0,1,2,3. \quad (3)$$

Aim of the study is to find the asymptotic expression of the eigenvalues and eigenfunction of the problem (1)-(3).
Without loss of generality, it is assumed that

$$\int_{-1}^{0} q_1(x)dx = 0, \;\; \int_{0}^{1} q_2(x)dx = 0. \tag{4}$$

It is known that periodic boundary conditions are not strongly regular. Without (3), asymptotic expressions of the problem is studied in [1]. Linear diferential operator order n with strongly regular boundary conditions and conjugate conditions is firstly investigated by [2]. For second order boundary value problem with periodic (antiperiodic) and conjugate conditions are studied in $[3-4]$.

2. Main Results

By using fundemental solutions in [1], we give following theorems.

Theorem 1. *Let* $q_1(x)$ *and* $q_2(x) \in C^4[-1,1]$. *Then, the eigenvalues of the boundary-value problem* (1)-(3) *has two infinite sequences* $\lambda_{k,1}, \lambda_{k,2}$ *(* $k = N, N+1...$ *) and have the following expressions*

$$\lambda_{k,1} = (k\pi)^4 + \frac{3}{16}\frac{\int\limits_{-1}^{0} q_1^2(t)dt + \int\limits_{0}^{1} q_2^2(t)dt}{k^4} + O(\frac{1}{k^5}),$$

$$\lambda_{k,2} = (k\pi i)^4 + \frac{3}{16}\frac{\int\limits_{-1}^{0} q_1^2(t)dt + \int\limits_{0}^{1} q_2^2(t)dt}{k^4} + O(\frac{1}{k^5}).$$

Theorem 2. *Asymptotic expression of eigenfunctions of boundary value problem* (1)-(3) *are*

$$y_{k_1}(x) = sin(k\pi x) + O(\frac{1}{k}), \quad x \in [-1,0) \cup (0,1],$$

$$y_{k_2}(x) = cos(k\pi x) + O(\frac{1}{k}), \quad x \in [-1,0) \cup (0,1].$$

3. Conclusions In this study, fourth order differential operator with periodic and conjugate boundary conditions is considered. Asymptotic expression of eigenvales and eigenfunctions are obtained.

REFERENCES

1. *Menken H.* Accurate asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions of a boundary-Value problem of fourth order // Boundary Value Problems. 2010. №. 1. P. 1-21.

2. *Muravei L.A.* Riesz bases in $L_2(-1,1)$ // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 1967. V. 91. P. 113–131.

3. *Cabri O,* On the Riesz basis property of the root functions of a discontinuous boundary problem // Mathematical Methods in Applied Science. 2019. V. 4. № 18. P. 6733–6740.

4. *Cabri O, Mamedov Pљh.R.* Riesz Basisness of Root Functions of a Sturm Liouville Operator with Conjugate Conditions // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. V. 41. P. 1–6.

УДК 517.957

ЗАДАЧА ВТЕКАНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЗРАСТАЮЩИХ ПО ВРЕМЕНИ ОБЛАСТЯХ

Калиев И.А., Сабитова Г.С.
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак, Россия;
kalievia@mail.ru, sabitovags@mail.ru

В данной работе для полной системы уравнений одномерного нестационарного движения вязкого теплопроводного газа доказывается глобальная разрешимость задачи втекания в нецилиндрических возрастающих по времени областях. Доказательство теоремы существования и единственности глобального по времени решения связано с получением априорных оценок, постоянные в которых зависят только от данных задачи и величины интервала времени T, но не зависят от промежутка существования локального решения. Исследования проводятся в эйлеровых переменных.

Ключевые слова: система уравнений Навье-Стокса, теплопроводный газ, глобальная разрешимость, нецилиндрические возрастающие по времени области.

INGRESSION PROBLEM FOR THE SYSTEM OF VISCOUS HEAT-CONDUCTING GAS IN TIME-INCREASING NON-CYLINDRICAL DOMAINS

Kaliev I.A., Sabitova G.S.
Sterlitamak branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia;
kalievia@mail.ru, sabitovags@mail.ru

In this article the global solvability of ingression problem for the complete system of equations describing one-dimensional non-stationary flow of the viscous heat-conducting gas in time-increasing non-cylindrical domains is proved. The proof of the existence and uniqueness theorem "in General" for the time is connected with obtaining of a priori estimates, the constant which depends only on the data of the problem and the value of the time interval T, but do not depend on the period of existence of a local solution. The research is conducted in the Eulerian variables.

Keywords: system of the Navier-Stokes equations, heat-conducting gas, global solvability, time-increasing non-cylindrical domains.

ВВЕДЕНИЕ

В работе И.А. Калиева, А.В. Кажихова [1] исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи со свободной границей, моделирующей процесс фазового перехода между вязким газом и твердым телом. При этом возникает вспомогательная задача, описывающая движение вязкого теплопроводного газа в криволинейной области, доказывается единственность и существование ее локального решения.

Для вязкого газа известны результаты по глобальной разрешимости задачи со свободной границей об истечении газа в вакуум [2], [3] и задачи о поршне, который двигается по заданному закону [3]. В обеих задачах скорость движения границы $s(t)$ области занятой газом совпадает со скоростью движения материальной точки с координатой $s(t)$, т.е. $u(s(t),t) = ds(t)/dt, 0 < t < T$. Другими словами, газ через границу $s(t)$ не течет и этот факт играет решающую роль при доказательстве теорем существования, поскольку область определения решения в лагранжевых координатах становится фиксированным цилиндром.

Случай когда $ds(t)/dt \leq 0$ рассмотрен в работах Калиева И.А. и Подкуйко М.С. [4], [5].

В настоящей работе $u(s(t),t) = 0, ds(t)/dt > 0$, т.е. $u(s(t),t) - ds(t)/dt < 0$, и газ втекает через подвижную границу области $x = s(t)$. Исследование проводится в эйлеровых переменных.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть нецилиндрическая область $\Omega_T = \{(x,t)|0 < x < s(t), 0 < t < T\}$, где $x = s(t)$ – известная гладкая функция, занята вязким теплопроводным газом. В работе изучается случай, когда область расширяется со временем, т.е. $ds(t)/dt > 0$. Одномерное нестационарное движение вязкого теплопроводного газа в области Ω_T описывается системой уравнений [3]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0,\ (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}) = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial p}{\partial x},\ p = R\rho\theta,\ (x,t) \in \Omega_T, \tag{2}$$

$$\rho(\frac{\partial\theta}{\partial t} + u\frac{\partial\theta}{\partial x}) = \kappa\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \mu(\frac{\partial u}{\partial x})^2 - p\frac{\partial u}{\partial x},\ (x,t) \in \Omega_T. \tag{3}$$

Здесь $\rho(x,t), u(x,t), p(x,t)$ и $\theta(x,t)$ – плотность, скорость, давление и абсолютная температура газа; μ, R, κ – положительные константы: вязкость, газовая постоянная и коэффициент теплопроводности газа соответственно.

В начальный момент времени задаются u, θ, ρ:

$$u(x,t)|_{t=0} = u_0(x),\ \theta(x,t)|_{t=0} = \theta_0(x),\ \rho(x,t)|_{t=0} = \rho_0(x),\ x \in [0, s_0], \tag{4}$$

где $s_0 = s(0)$. На известных границах $x = 0$ и $x = s(t)$ задаются условия:

$$u(x,t)|_{x=0} = u_1(t) > 0,\ u(x,t)|_{x=s(t)} = 0,\ t \in [0,T], \tag{5}$$

$$\theta(x,t)|_{x=0} = \theta_1(t),\ \theta(x,t)|_{x=s(t)} = \theta_2(t),\ t \in [0,T], \tag{6}$$

$$\rho(x,t)|_{x=0} = \rho_1(t),\ \rho(x,t)|_{x=s(t)} = \rho_2(t),\ t \in [0,T]. \tag{7}$$

Условие $u_1(t) > 0$ означает, что газ через фиксированную границу $x = 0$ втекает в область Ω_T. Случай когда $u_1(t) = 0$ исследован в [6].

Предполагается, что для всех $t \in [0,T]$ и $x \in [0, s_0]$ выполняются неравенства:

$$0 < m \leq \rho_0(x), \rho_1(t), \rho_2(t), \theta_0(x), \theta_1(t), \theta_2(t), u_1(t) \leq M < +\infty, \tag{8}$$

$$0 < s_0, \ 0 < m \leq \frac{ds}{dt}(t) \leq M, \tag{9}$$

где m, M – некоторые положительные константы.

Задача Gas. Требуется найти функции $\rho(x,t), u(x,t), \theta(x,t)$ удовлетворяющие системе уравнений (1) – (3), если в начальный момент и на известных границах выполняются условия (4) – (7).

Теорема [7]. Пусть начальные и краевые данные задачи Gas принадлежат пространствам Гельдера

$$\rho_0(x) \in C^{1+\alpha}([0,s_0]), \ u_0(x) \in C^{2+\alpha}([0,s_0]), \ \theta_0(x) \in C^{2+\alpha}([0,s_0]),$$

$$s(t), \rho_1(t), \rho_2(t) \in C^{1+\alpha}([0,T]), \ \theta_1(t), \theta_2(t), u_1(t) \in C^{(2+\alpha)/2}([0,T]),$$

$0 < \alpha = const < 1$; выполнены условия (8), (9) и условия согласования нулевого и первого порядков в точках $(0,0), (s_0, 0)$.

Тогда задача Gas имеет единственное классическое решение из пространств Гельдера:

$$\rho(x,t) \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}_T), \ u(x,t) \in C^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T), \ \theta(x,t) \in C^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T),$$

причем

$$0 < m_1 \leq \rho(x,t) \leq M_1 < +\infty, \ 0 < m_2 \leq \theta(x,t) \leq M_2 < +\infty, (x,t) \in \Omega_T,$$

где m_1, M_1, m_2, M_2 – некоторые положительные константы.

Локальная теорема существования и единственности задачи Gas доказана в [1]. Поэтому доказательство теоремы связано с получением априорных оценок, постоянные в которых зависят только от данных задачи и величины интервала времени T, но не зависят от промежутка существования локального решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kaliev I.A., Kazhikhov A.V.* Well-posedness of a gas-solid phase transition problem // J. Math. Fluid Mech. 1999. V. 1, N. 3. P. 282–308.

2. *Кажихов А.В.* О глобальной разрешимости одномерных краевых задач для уравнений вязкого теплопроводного газа // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1976. Вып. 24. С. 45–61.

3. *Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983. 319 с.

4. *Калиев И.А., Подкуйко М.С.* Об одной граничной задаче для уравнений вязкого теплопроводного газа в нецилиндрических убывающих со временем областях // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42, № 10. С. 1356–1374.

5. *Kaliev I.A., Podkuiko M.S.* Nonhomogeneous Boundary Value Problems for Equations of Viscous Heat-Conducting Gas in Time-Decreazing Non-Rectangular Domains // J. Math. Fluid Mech. 2008. V. 10, N. 2. P. 176–202.

6. *Калиев И.А., Шухардин А.А., Сабитова Г.С.* Граничные задачи для уравнений вязкого теплопроводного газа в нецилиндрических возрастающих по времени областях // Уфимский математический журнал. 2014. Т. 6, № 4. С. 83–101.

7. *Калиев И.А., Шухардин А.А., Сабитова Г.С.* Задача втекания для систем уравнений вязкого теплопроводного газа в нецилиндрических возрастающих по времени областях // Сибирский журнал инустриальной математики. 2015. Т. XVIII, № (1)61. С. 28–44.

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ, ПОРОЖДЕННОЙ УРАВНЕНИЯМИ НАВЬЕ-СТОКСА

Кальменов Т.Ш.

Института математики и математического моделирования, г. Алматы, Казахстан;
kalmenov.t@mail.ru

В работе доказана однозначная разрешимость задачи Коши для одного класса интегро-дифференциальной системы уравнений.

Ключевые слова: система уравнений Навье-Стокса, задача Коши, существование, единственность.

ON THE SOLVABILITY OF ONE CLASS OF AN INTEGRO-DIFFERENTIAL SYSTEM GENERATED BY THE NAVIER-STOKES EQUATIONS

Kalmenov T.Sh.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan;
kalmenov.t@mail.ru

In this paper, the unique solvability of the Cauchy problem is proved for one class of integro-differential system of equations.

Key words: system of Navier-Stokes equations, Cauchy problem, existence, uniqueness .

В дальнейшем через $u(x,t)=(u_1,...,u_n)$ обозначим решение системы Навье-Стокса

$$Lu_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta_x u_i+\sum_{j=1}^{n}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial p}{\partial x_i}=f_i. \quad (x,t)\in R^n_{0T}, \qquad (1)$$

$$div\, u=0, \qquad (2)$$

$$u_i|_{t=0}=0, \qquad (3)$$

где u – вектор скорости, а p давление жидкости, $R^n_{0T}=R^n\times(0,T)$.

Теорема 1. *Пусть* $u(x,t)\in C^3(R^n_{0T})\cap L_2(R^n_{0T})$ *, тогда существует единственное решение* $y(\xi,t)\in C^3(R^n_{0T})\cap L_2(R^n_{0T})$ *системы уравнений*

$$\frac{\partial y(\xi,t)}{\partial t}=u(y,t), \qquad y(\xi,t)|_{t=0}=\xi, \qquad (4)$$

$$y(\xi,t)-\int_0^t u(y(\eta),\eta)d\eta=\xi, \qquad (5)$$

где

$$y=(y_1,y_2,...,y_n), \quad u=(u_1,u_2,...,u_n), \quad \xi=(\xi_1,...,\xi_n),$$

такие, что при каждом фиксированном $t\in[0,T]$ *оператор* $(y(\xi,t),t)$ *, определяемый формулой (6), взаимно-однозначно отображает* R^n_{0T} *на себя.*

Пусть $y(\xi,t)$ -неподвижная точка оператора

$$y(\xi,t)=\xi+\int_0^t u(y(\eta),\eta)d\eta. \qquad (6)$$

Легко проверить, что вектор $y(\xi,t)$ является решением задачи Коши

$$\frac{dy_i}{dt}=u_i(y(t),t), \qquad (7)$$

$$y_i|_{t=0} = \xi_i, \ \ i = 1, 2, ..., n. \tag{8}$$

Пример 1. В одномерным случае, когда $u = const$, решение задачи (7) – (8) задается формулой

$$y = \xi e^{ut}.$$

Легко проверить, что при $t \in [0, T]$, $\{y(\xi, t)\} = \{\xi e^{ut} = R^1\}$ при $\xi \in R^1$.

Естественно возникает вопрос будут ли заполнять решение $y(\xi, t)$ системы (7) – (8) при некоторых ограничениях на u в случае когда $\{\xi\} \in R^n$ совпадает со всем R^n как в одномерном случае.

Пусть A матрица $n \times n$. Тогда имеем

$$\frac{dy_i}{dt} = (Ay)_i(t), \ \ y_i|_{t=0} = \xi_i, \ \ i = 1, 2, ..., n. \tag{9}$$

Пример 2. Пусть y_i- двукратные собственное значение матрицы A, т.е. $Ay_{i,1} = \lambda_i y_{i,1} + y_{i,0}$, $Ay_{i,0} = \lambda_i y_{i,0}$, остальные собственные значения однократные $Ay_k = \lambda_k y_k, \ \ \lambda_k \neq \lambda_i$.

Тогда решение системы подвижных координат имеет вид

$$\begin{gathered} y_k(\xi, t) = e^{\frac{\lambda_k t^2}{2}} \xi_k, \\ y_{i,0}(\xi, t) = e^{\frac{\lambda_i t^2}{2}} \xi_{i,0}, \\ y_{i,1}(\xi, t) = e^{\frac{\lambda_i t^2}{2}} (t+1) \xi_{i,1}. \end{gathered} \tag{10}$$

Очевидно, что $y_k(\xi, t)$, $y_{i,0}(\xi, t)$, $y_{i,1}(\xi, t)$ заполняет все R^n при любых $t \in [0, T]$.

Пример 3.

$$\begin{gathered} \frac{dy_k}{dt} = t \sin y_k, \ \ y_k(0) = \xi_k, \\ y_k(\bar{\xi}_k, t) = arctg e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \xi_k, \\ \{y_k(\bar{\xi}_k, t)\} = R^1, \ \ t \in [0, T]. \end{gathered} \tag{11}$$

Имеет место

Лемма. *Пусть $u(y, t)$ удовлетворяет условиям Липшица*

$$|u(y, t) - u(\overline{y}, t)| \leq M|y - \overline{y}|, \ \ |u(y, t)| \leq M, \tag{12}$$

где $y, \overline{y} \in R^n$.

Тогда при фиксированном $t \in [0, T]$ решение интегрального уравнения (6) $y(\xi, t) \equiv R^n$ при $\xi \in R^n$.

Доказательство. Учитывая неравенства (12) из (6) легко проверить что

$$\int_0^t |u_i(y(\xi, \eta), \eta)| \, d\eta \leq Mt,$$

а учетом этого из (6) получим

$$\xi_i - Mt \leq y_i(\xi, t) \leq \xi_i + Mt.$$

Отсюда при фиксированном $t \in [0, T]$ следует

$$\sup_{\xi} y_i(\xi, t) = \infty, \ \inf_{\xi} y_i(\xi, t) = -\infty, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Из-за непрерывности $y(\xi, t)$ по ξ имеем $\{y_i(\xi, t)\} = R^n$.

Лемма доказана. Следовательно, теорема 1 доказана.

Замечание 1. *Подвижные координаты* $y(\xi)$ *сохраняют нормы гладких функций в исходных координатах:*

$$\int_0^T dt \int_{R^n} g^2(y, t) dy = \int_0^T dt \int_{R^n} g^2(y(\xi, t), t) dy(\xi, t), \tag{13}$$

$$\int_0^T dt \int_{R^n} |\Delta_y g(y, t)|^2 \, dy = \int_0^T dt \int_{R^n} |\Delta_y g(y(\xi, t), t)|^2 \, dy(\xi, t). \tag{14}$$

Замечание 2. *В построенных подвижных координатах после некоторых преобразованиях можно доказать, что*

$$\left\| div_y \frac{du_i}{dt} \right\| \leq \varepsilon \|f\|_{W_2^2(R^n_{0,T})}, \ \ R^n_{0,T} = R^n \times (0, T),$$

где $\frac{du_i}{dt}-$ *ускорение движения, а* f *– внешняя сила,* $\varepsilon-$ *малое положительное число. Это оценка позволяет решать проблему Навье-Стокса.*

В новых переменных $y = y(\xi, t)$, $t = t$ задача Навье-Стокса примет вид

$$\frac{du_i}{dt} - \nu \Delta_y u_i - \frac{\partial P}{\partial y_i} = f_i, \tag{15}$$

$$divu = 0, \tag{16}$$

$$u_i|_{t=0} = 0, \tag{17}$$

где

$$\frac{du_i(y,t)}{dt} = \frac{\partial u_i}{dt} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial t}\frac{\partial u_i}{\partial y_j} = \frac{\partial u_i}{dt} + \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial y_j}, \quad \frac{\partial y_j}{\partial t} = u_j.$$

Задача Навье-Стокса эквивалентно уравнению

$$u_i(y,t) - \nu \int_0^t \Delta_y u_i(y(\xi,\eta),\eta)d\eta - \int_0^t \frac{\partial P}{\partial y_i}(y(\xi,\eta))d\eta = \int_0^t f_i(y(\xi,\eta))d\eta. \tag{18}$$

Из системы интегральных уравнений (18) можно получить априорную оценку

$$\left\|\Delta_y^m u_i\right\|_0 + \|u\|_0 \le d\left(\left\|\Delta_y^m f_i\right\|_0 + \|f\|_0\right), \tag{19}$$

$$\left\|grad\Delta_y^m P\right\|_0 \le d\left(\left\|\Delta_y^m f_i\right\|_0 + \|f\|_0\right). \tag{20}$$

Отсюда при $2m \ge \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ также получим

$$\|\omega_i\|_{W_2^{2m,0}(R_{0,T}^n)} \le$$

$$\le d\left(\sum_{|\alpha|\le m} \|f\|_{W_2^{2|\alpha|,0}(R_{0,T}^n)} \|f\|_{W_2^{2m-2|\alpha|,0}(R_{0,T}^n)} + \|f\|_{W_2^{2m,0}(R_{0,T}^n)}\right), \tag{21}$$

где

$$\omega_i = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta\right)u_i = \diamondsuit u_i, \;\; u_i = \diamondsuit^{-1}\omega_i, \tag{22}$$

$\diamondsuit-$ оператор теплопроводности, а $\diamondsuit^{-1}-$ обратный к нему.

Относительно ω_i получим систему интегральный уравнений

$$\omega_i + (E-Q)\sum_{j=1}^{n} \diamondsuit^{-1}\omega_j \frac{\partial}{\partial \eta}\diamondsuit^{-1}\omega_i = ((E-Q)f)_i, \tag{23}$$

$Qg = \nabla\Delta^{-1}divg$, $Q^2 = Q-$ оператор проектирования.

Система интегральных уравнений (23) решается методом продолжения по параметру из следующих уравнений:

$$\omega_i + \mu(E-Q)\sum_{j=1}^{n} \diamondsuit^{-1}\omega_j \frac{\partial}{\partial \eta}\diamondsuit^{-1}\omega_i = ((E-Q)f)_i, \qquad \mu \in (0,1). \quad (24)$$

Теорема 2. *Для любой* $f \in W_2^{2m,0}(R_{0T}^n)$ *системы интегральных уравнений (24) имеет единственное решение* $u \in W_2^{2m,0}(R_{0T}^n)$ *при любом* $\mu \in [0,1]$.

Краткая схема доказательства. Для решения системы интегральный уравнения (24) при любом $\mu \in [0,1]$ справедлива оценка (22). Пользуясь этим можно установить, что множество $\mu \in [0,1]$ для которых уравнения (24) разрешены и открыто и замкнуто т.е. $\mu \in [0,1]$.

Путь система (24) разрешима при $\mu = \mu_0$. Покажем однозначную разрешимость системы

$$\omega + (\mu_0+\varepsilon)(E-Q)\diamondsuit^{-1}\omega\nabla\diamondsuit^{-1}\omega = (E-Q)f, \quad (25)$$

$$\ell\omega = \omega + \mu_0(E-Q)\diamondsuit^{-1}\omega\nabla\diamondsuit^{-1}\omega = \bar{\omega}, \quad (26)$$

по предположению

$$\omega = \ell^{-1}\bar{\omega}, \quad (27)$$

где $\ell^{-1}\bar{\omega}$ – ограниченный оператор, $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число.

Относительно $\bar{\omega}$ получим следующую систему интегральных уравнений:

$$\bar{\omega} + \varepsilon(E-Q)\diamondsuit^{-1}\ell^{-1}\bar{\omega}\nabla\diamondsuit^{-1}\ell^{-1}\bar{\omega} = (E-Q)f. \quad (28)$$

Пользуясь малостью ε получим однозначную разрешимость уравнения (28) относительно $\bar{\omega}$ и в силу равенства (27) следует однозначную разрешимость (25).

Пусть теперь $\mu_n \to \mu_0$ и уравнение (26) разрешимо при точки $\mu \in [0,1]$. Тогда в силу неравенства (22)

$$\|\omega_n\| \le \alpha|_{|\alpha|\le m}\left(\|f\|_{W_2^{2\alpha,0}(R_{0T}^n)}\cdot\|f\|_{W_2^{2m-2\alpha,0}(R_{0T}^n)} + \|e\|_{W_2^{2m,0}(R_{0T}^n)}\right).$$

Отсюда следует слабая сходимость ω_{μ_n} к некоторый ω_{μ_0} . В силу вполне непрерывности оператора $\diamondsuit^{-1}\nabla\diamondsuit^{-1}$ следует сильная сходимость ω_{μ_n} к ω_{μ_0} , т.е. множество $\{\mu_n\}$ – замкнуто. Тем самым множество $\mu \in [0,1]$ для которых уравнение (25) разрешимо, открыто и замкнуто, т.е $\mu \equiv [0,1]$. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Темам Р.* Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. М.: Издательство "Мир 1981. 408 с.

2. *Tao T.* Quantitative bounds for critically bounded solutions to the Navier-Stokes equations. arXiv preprint arXiv:1908.04958. 2019.

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Капустин Н.Ю. [1] **, Холомеева А.А.** [1,2]

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия;*

[2] *Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской Академии Наук, г. Москва, Россия;*

n.kapustin@bk.ru, kholomeeva@cs.msu.ru

В работе рассматриваются смешанная задача для уравнения теплопроводности и соответствующая ей спектральная задача со спектральным параметром в граничном условии. Установлено, что в классической постановке смешанная задача имеет нееднинтсвенное решение. При дополнительном требовании непрерывности решения по пространственной переменной в угловой точке доказана корректность этой задачи.

Ключевые слова: смешанная задача, спектральная задача, уравнение теплопроводности.

ON A SOLVABILITY OF A MIXED PROBLEM FOR THE HEAT EQUATION

Kapustin N. Yu. [1] **, Kholomeeva A.A.** [1,2]

[1] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;*

[2] *Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences;*

n.kapustin@bk.ru, kholomeeva@cs.msu.ru

The paper considers a mixed problem for the heat equation and the corresponding spectral problem with a spectral parameter in the boundary condition. It is established that in the classical setting the mixed problem has a non-unique solution. With the additional requirement of the continuity of the solution with respect to the spatial variable at the corner point, the correctness of this problem is proved.

Key words: mixed problem, spectral problem, heat equation.

В замыкании области $D = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ ищем функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \tag{1}$$

начальному условию

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{2}$$

и граничным условиям

$$u_x(1,t) = du(1,t), \quad au_x(0,t) + u_{xt}(0,t) = bu_t(0,t), \tag{3}$$

$$0 < t < T, \quad a, b = const > 0, d = const < 0.$$

Задача (1)-(3) в случае, когда функция $f(x)$ принадлежит классу Гельдера $C^\alpha[0,1], \alpha > 0$ имеет решение, но оно не является единственным. Мы дополнительно требуем непрерывности производной решения задачи (1)-(3) по пространственной переменной в точке (0,0), тогда мы можем гарантировать единственность решения.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$, принадлежащую классу Гельдера $C^\alpha[0,1]$ с любым положительным показателем α. Тогда существует единственное решение $u(x,t)$ задачи (1)-(3) с непрерывной производной $u_x(x,t)$ в точке (0,0), которое представимо в виде ряда*

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \Big(\int_0^1 X_n(s) f(s) ds \Big) X_n(x) e^{-\lambda_n t},$$

где

$$X_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n} x) - \frac{(a - \lambda_n)}{b\sqrt{\lambda_n}} \cos(\sqrt{\lambda_n} x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

с занумерованными в порядке возрастания собственными числами из характеристического уравнения

$$ctg\sqrt{\lambda} = \frac{\lambda\sqrt{\lambda} + (db-a)\sqrt{\lambda}}{(b-d)\lambda + ad}, D_n = \Big(\int\limits_0^1 [X_n(x)]^2 dx + \frac{a[X_n'(0)]^2}{b\lambda_n^2}\Big)^{-1}.$$

Для доказательства теоремы использованы идеи и методы работ [1-3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект) и Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Математического центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению 075-15-2019-1621.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И.* О сходимости спектральных разложений функций из класса Гельдера для двух задач со спектральным параметром в граничном условии. // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 8. С. 1069-1074.

2. *Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И.* О базисности в пространстве L_p систем собственных функций, отвечающих двум задачам со спектральным параметром в граничном условии. // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. N 10. С. 1357-1360.

3. *Капустин Н.Ю.* О спектральной задаче, возникающей при решении одной смешанной задачи для уравнения теплопроводности со смешанной производной в граничном условии. Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 5. С. 694-699.

УДК 517.95

ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ ОДНОГО ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

Каримов Ш.Т, Юлбарсов Х.А.
Ферганский политехнический институт, Узбекистан, Фергана,
shaxkarimov@gmail.com, xojiakbaryulbarsov1@gmail.com

Исследована задача Гурса для одномерного уравнения Баренблатта-Желтова-Кочиной с оператором Бесселя в прямоугольной области. Применяя, оператор преобразования Эрдейи-Кобера, получена явная формула решения поставленной задачи

Ключевые слова: псевдопараболическое уравнение, оператор Бесселя, оператор Эрдейи-Кобера, задача Гурса.

THE GOURSAT PROBLEM FOR A CERTAIN THIRD-ORDER PSEUDOPARABOLIC EQUATION WITH THE BESSEL OPERATOR

Karimov Sh.T., Yulbarsov Kh.A.
Fergana Polytechnic Institute, Fergana, Uzbekistan;
shaxkarimov@gmail.com, xojiakbaryulbarsov1@gmail.com

The Goursat problem is investigated for the one-dimensional Barenblatt-Zheltov-Kochina equation with the Bessel operator in a rectangular domain. Applying the Erdelyi-Kober transmutation operator, an explicit formula for solving the problem is obtained.

Key words: pseudoparabolic equation, Bessel operator, Erdelyi-Kober operator, Goursat problem.

В настоящее время в связи с проблемами передачи тепла в гетерогенной среде, влагопереноса в почвенных грунтах, нестационарного процесса фильтрации в трещиновато-пористой среде и ряда других проблем значительно возрос интерес к изучению начально-краевых и краевых задач для неклассических уравнений с частными производными. К таким неклассическим уравнениям относится уравнения псевдопараболического типа. Под псевдопараболическими уравнениями подразумевается уравнения высокого порядка с производными по времени первого порядка [1].

В работе Г.И.Баренблатта, Ю.П.Желтова, И.Н.Кочиной [2] получено впервые линейное псевдопараболическое уравнение вида

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta_x u(x,t)+\lambda u(x,t))+\Delta_x u(x,t)=0, \tag{1}$$

описывающее нестационарный процесс фильтрации в трещиновато-пористой среде, где Δ_x - многомерный оператор Лапласа, $\lambda = const \in R$.

Исследованию уравнений псевдопараболического типа посвящено большое количество работ, обзор которых можно найти в монографиях [1, 3, 4].

Задачи для неклассических уравнений продолжают привлекать внимание исследователей в силу двух обстоятельств. Во - первых, они возникают при рассмотрении целого ряда важных практических задач. Во - вторых, исследование этих уравнений начато сравнительно недавно и еще далеко от завершения, что обуславливает интерес к ним. Этот интерес также связан и с математическим своеобразием, выражающимся в неклассическом характере получаемых уравнений.

Данная работа посвящена изучению вопросов разрешимости в классическом смысле аналога краевой задачи Гурса для уравнения

$$L_\lambda^\alpha(u)\equiv\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2\alpha}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda u\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2\alpha}{x}\frac{\partial u}{\partial x}=0, \tag{2}$$

где $\alpha,\lambda\in R$, причем $0<2\alpha<1$.

Параметр α, входящее в уравнение (2), определяет порядок сингулярности уравнения и задач с ним связанных. При $\alpha=0$, уравнение (2) переходит в одномерное уравнение Баренблатта, Желтова, Кочиной (1), а при $\alpha=(n-1)/2$, мы получим сферически симметричный случай уравнения (1), причем в последнем случае переменная x выполняет роль переменной $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}$ в сферической системе координат.

В данной работе в области $\Omega=\{(x,y):\, 0<x<l,\ 0<t<T\}$ исследуется аналог задачи Гурса для уравнения (2).

Задача G. Требуется найти функцию $u(x,t)\in C^1(\Omega\cup[0,T])$, удовлетворяющую уравнению (2) и краевым условиям

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad 0\le x\le l, \tag{3}$$

$$u(0,t)=\psi_1(t),\quad \lim_{x\to 0}x^{2\alpha}u_x(x,t)=\psi_2(t),\ 0\le t\le T, \tag{4}$$

где $\varphi(t)$, $\psi_k(x)$, $(k = 1,2)$ заданные гладкие функции, причем $\varphi(0) = \psi_1(0)$, $\psi_2(0) = 0$.

В силу линейности уравнения (2) сначала рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Задача G_0 **.** Требуется найти функцию $u(x,t) \in C^1(\Omega \cup [0,T])$, удовлетворяющую уравнению (2), краевому условию (3) и

$$u(0,t) = \psi_1(t), \;\; u_x(x,0) = 0, \;\; 0 \le t \le T, \tag{5}$$

где $\varphi(t)$, $\psi_1(x)$ - заданные гладкие функции, причем $\varphi(0) = \psi_1(0)$, $\varphi'(0) = 0$, ${\psi'}_1(0) = 0$.

Для решения поставленной задачи G_0 применим метод операторов преобразования [8, 9, 10, 11]. В качестве оператора преобразования используем оператор Эрдейи-Кобера дробного порядка [5]:

$$I_{\eta,\alpha}\varphi\left(x\right) \equiv \frac{2x^{-2(\eta+\alpha)}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int\limits_0^x \left(x^2-\xi^2\right)^{\alpha-1}\xi^{2\eta+1}\varphi\left(\xi\right)d\xi \tag{6}$$

Для оператора (6) справедлива следующая теорема [5].

Теорема. Если $\alpha > 0$, $f\left(x\right) \in C^2\left(0,b\right)$, $b > 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^{2\eta+1}f'\left(x\right) = 0$, то справедлива равенство

$$B^{(x)}_{\eta+\alpha}I^{(x)}_{\eta,\alpha}f\left(x\right) = I^{(x)}_{\eta,\alpha}B^{(x)}_{\eta}f\left(x\right),$$

где $B^{(x)}_{\eta} \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^2} + \dfrac{2\eta+1}{x}\dfrac{\partial}{\partial x} = x^{-2\eta-1}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^{2\eta+1}\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ оператора Бесселя, действующий по переменной x.

Данная теорема позволяет применить оператор (6) как оператор преобразования, позволяющий преобразовать уравнения с сингулярными коэффициентами в уравнения без сингулярных коэффициентов. Этот факт применим для исследования задачи G_0.

Предположим, что решение задачи G_0 существует. Это решение ищем в виде

$$u\left(x,t\right) = I^{(x)}_{-\frac{1}{2},\alpha}v\left(x,t\right) = \frac{2x^{1-2\alpha}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int\limits_0^x \left(x^2-\xi^2\right)^{\alpha-1}v\left(\xi,t\right)d\xi, \tag{7}$$

где $v(x,t)$ – неизвестная функция.

Подставляя (7) в уравнение (2) и краевым условиям (3) и (5), а затем используя теорему при $\eta = -1/2$, получим задачу нахождения решения $v(x,t)$ уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(v_{xx}\left(x,t\right)+\lambda v\left(x,t\right)\right)+v_{xx}\left(x,t\right)=0 \tag{8}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$v\left(x,0\right)=\Phi\left(x\right),\ \ v(0,t)=\gamma_0\psi_1(t),\ \ v_x(0,t)=0, \tag{9}$$

где $\Phi\left(x\right)=\left(I^{(x)}_{-\frac{1}{2},\alpha}\right)^{-1}\varphi\left(x\right)$, $\gamma_0=\Gamma(1/2+\alpha)/\sqrt{\pi}$.

Решение задачи (8), (9) построена методом функции Римана [7]:

$$v\left(x,t\right)=\gamma_0\psi_1\left(t\right)\cos\sqrt{\lambda}x+\Phi\left(x\right)e^{-t}-\Phi\left(0\right)R_0\left(1;\frac{1}{2},1;1;-\frac{\lambda}{4}x^2,-t\right)-$$

$$+\frac{\lambda}{2}\gamma_0x^2\int\limits_0^t R_0\left(2;\frac{3}{2},2,2;-\frac{\lambda}{4}x^2,\tau-t\right)\psi_1\left(\tau\right)d\tau+$$

$$-\lambda t\int\limits_0^x R_0\left(2;\frac{3}{2},2,2;-\frac{\lambda}{4}\left(\xi-x\right)^2,-t\right)\left(\xi-x\right)\Phi\left(\xi\right)d\xi, \tag{10}$$

здесь

$$R_0\left(1;\ 1/2,1,1;\sigma,\omega\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\omega^n}{n!}{}_1F_2\left(1+n;1/2,1;\sigma\right),$$

где ${}_1F_2\left(a;b,c;\sigma\right)$ - обобщенная гипергеометрическая функция [12], $\sigma=-\frac{\lambda}{4}\left(\xi-x\right)^2$, $\omega=\tau-t$.

Затем, подставляя (10) в равенство (7) после некоторых выкладок получим решение задачи G_0. Учитывая свойства уравнений с оператором Бесселя аналогично решается и задача G.

Пользуясь полученным решением задачи Гурса и функцией Римана можно исследовать и другие начальные, краевые и нелокальные задачи для уравнения (2). Данный метод также можно применить к решению краевых задач для многомерного уравнения и уравнения высокого порядка типа (2) с многими сингулярными коэффициентами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.Ю., Плетнер Ю.Д.* Линейные и нелинейные уравнения Соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.

2. *Баренблатт Г.И.., Желтов Ю.П., Кочина И.Н.* Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // Прикл. мат. мех. 1960. 24. № 5. С. 58-73.

3. *Kozhanov A.I.* Composite Type Equations and Inverse Problems. Utrecht: VSP 1999.

4. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.

5. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. Минск: Наука и техника. 1987. 702с.

6. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука. 1981. 512 с.

7. *Каримов Ш.Т, Юлбарсов Х.А.* Аналог задачи Гурса для одного псевдопараболического уравнения третьего порядка // Материалы научной конференции "Актуальные проблемы стохостического анализа". Ташкент. 2021. С. 309–311

8. *Carroll R.* Transmutation Theory and Applications. North Holland, 1986. 351 p.

9. *KiryakovaV.* Generalized Fractional Calculus and Applications. Harlow and N. York, 1994. 387 p.

10. *Катрахов В.В., Ситник С.М.* Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Современная математика. Фундаментальные направления. Москва, 2018. Т. 64. № 2. С. 211–426.

11. *Ситник С.М., Шишкина Э.Л.* Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. М.: Физматлит, 2019. 224 с.

12. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т.1, 2. М.: Наука, 1973. 296 с.

УДК 517.956.25

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ МУЗИЛАКА-ОРЛИЧА

Кожевникова Л.М., Кашникова А.П.
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак, Россия;
kosul@mail.ru, a.kashnikova98@yandex.ru

В работе рассматривается нелинейное эллиптическое уравнение второго порядка с нелинейностями, определяемыми функцией Музилака-Орлича и суммируемой правой частью. В произвольной области, удовлетворяющей сегментному свойству, доказано существование энтропийного решения задачи Дирихле и установлено, что оно является ренормализованным решением.

Ключевые слова: квазилинейное эллиптическое уравнение, задача Дирихле, пространство Музилака-Орлича, энтропийное решение, ренормализованное решение, диффузная мера, неограниченная область.

EXISTENCE SOLUTIONS OF QUASILINEAR ELLIPTIC EQUATIONS IN MUZILAK-ORLICZ SPACES

Kozhevnikova L.M. [1] **, Kashnikova A.P.** [2]
[1,2] *Sterlitamak branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia;*
kosul@mail.ru, a.kashnikova98@yandex.ru

The paper considers a nonlinear elliptic equation of the second order with nonlinearities determined by the Musilak-Orlicz function and the summable right-hand side. In an arbitrary domain satisfying the segment property, the existence of an entropy solution to the Dirichlet problem is proved and it is established that it is a renormalized solution.

Key words: quasilinear elliptic equation, Dirichlet problem, Musilak-Orlicz space, entropy solution, renormalized solution, diffuse measure, unbounded domain.

Пусть Ω — произвольная неограниченная область пространства $\mathbb{R}^n = \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\}, \quad n \geq 2$. Рассматривается задача Дирихле для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка вида

$$-\operatorname{div} \mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u) + M'(\mathrm{x}, u) + b(\mathrm{x}, u, \nabla u) = f, \quad \mathrm{x} \in \Omega, \quad f \in L_1(\Omega); \tag{1}$$

с однородным краевым условием

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Концепция ренормализованных решений служит основным шагом для изучения общих вырождающихся эллиптических уравнений с данными в виде меры. Для уравнения вида

$$-\operatorname{div} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) = \mu, \quad \mathrm{x} \in \Omega, \tag{3}$$

в пространствах Соболева доказаны устойчивость и существование ренормализованного решения задачи Дирихле (3), (2) в ограниченной области Ω.

I. Chlebicka в [1] доказала существование, а для диффузной меры μ и единственность ренормализованного решения задачи Дирихле (3), (2).

В работе [2] доказано существование ренормализованного решения задачи (3), (2) с $\mu \in L_1(\Omega)$ и неоднородной анизотропной функцией Музилака-Орлича.

Авторы работ [3], [4] установили существование ренормализованного и энтропийного решений, соответственно, задачи Дирихле для уравнения вида

$$-\operatorname{div} (\mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u) + \mathrm{c}(u)) + a_0(\mathrm{x}, u, \nabla u) = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad \mathrm{x} \in \Omega,$$

с функцией $\mathrm{c} \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. В работах [5], [6] доказано существование энтропийного решения задачи Дирихле для уравнения вида

$$-\operatorname{div} (\mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u) + \mathrm{c}(\mathrm{x}, u)) = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad \mathrm{x} \in \Omega,$$

с каратеодориевой функцией $\mathrm{c}(\mathrm{x}, s_0) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, подчиняющейся условию роста по переменной s_0.

Процитированные выше результаты получены для энтропийных и ренормализованных решений эллиптических задач в ограниченных областях. Трудность обобщения на неограниченную область состоит в том, что в неограниченной области не работает аналог неравенства

Пуанкаре-Соболева и теорема о компактности вложения пространства Музилака-Орлича-Соболева. Решить проблему авторам удалось благодаря добавлению в уравнение (1) слагаемого $M'(\mathrm{x},u)$ и дополнительному требованию интегрируемости функции $M(\cdot,z)$ по Ω. В настоящей статье доказано существование энтропийного решения и установлено, что оно является ренормализованным решением задачи (1), (2) в произвольной (в том числе и неограниченной) области Ω, удовлетворяющей сегментному свойству.

Определение 1. Пусть функция $M(\mathrm{x},z):\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $M(\mathrm{x},\cdot)$ — N-функция по $z\in\mathbb{R}$, то есть она является выпуклой вниз, неубывающей, четной, непрерывной, $M(\mathrm{x},0)=0$ для п.в. $\mathrm{x}\in\Omega$ и

$$\inf_{\mathrm{x}\in\Omega}M(\mathrm{x},z)>0 \quad \text{для всех} \quad z\neq 0,$$

$$\lim_{z\to 0}\sup_{\mathrm{x}\in\Omega}\frac{M(\mathrm{x},z)}{z}=0, \quad \lim_{z\to\infty}\inf_{\mathrm{x}\in\Omega}\frac{M(\mathrm{x},z)}{z}=\infty;$$

2) $M(\cdot,z)$ — измеримая функция по $\mathrm{x}\in\Omega$ для любых $z\in\mathbb{R}$.

Такая функция $M(\mathrm{x},z)$ называется функцией Музилака-Орлича или обобщенной N–функцией.

Будем рассматривать следующие условия на функцию Музилака-Орлича:

$(M1)$ Функция $M(\mathrm{x},z)$ интегрируема, если

$$\varrho_M(z)=\int_\Omega M(\mathrm{x},z)d\mathrm{x}<\infty, \quad \forall z\in\mathbb{R}.$$

$(M2)$ Функция $M(\mathrm{x},z)$ удовлетворяет условию ϕ–регулярности, если существует функция $\phi:[0,1/2]\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ такая, что $\phi(\cdot,z)$ и $\phi(r,\cdot)$ неубывающие функции и для всех $\mathrm{x},\mathrm{y}\in\overline{\Omega}$, $|\mathrm{x}-\mathrm{y}|\leq\frac{1}{2}$, $z\in\mathbb{R}^+$ и некоторой константы $c>0$ выполняется

$$M(\mathrm{x},z)\leq\phi(|\mathrm{x}-\mathrm{y}|,z)M(\mathrm{y},z), \quad \limsup_{\varepsilon\to 0^+}\phi(\varepsilon,c\varepsilon^{-n})<\infty.$$

$(M3)$ Функция $M(\mathrm{x},z)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\int_1^\infty\frac{M^{-1}(\mathrm{x},z)}{z^{\frac{n+1}{n}}}dz=\infty, \quad \int_0^1\frac{M^{-1}(\mathrm{x},z)}{z^{\frac{n+1}{n}}}dz<\infty.$$

Сопряженная функция $\overline{M}(\mathrm{x},\cdot)$ к функции Музилака-Орлича $M(\mathrm{x},\cdot)$ в смысле Юнга для п.в. $\mathrm{x}\in\Omega$ и любых $z\geq 0$ определяется равенством

$$\overline{M}(\mathrm{x},z)=\sup_{y\geq 0}\left(yz-M(\mathrm{x},y)\right).$$

$\mathcal{L}_M(\Omega)$ — обобщенный Музилака-Орлича класс измеримых функций $v:\Omega\to\mathbb{R}$ таких, что

$$\varrho_{M,\Omega}(v)=\int_\Omega M(\mathrm{x},v(\mathrm{x}))d\mathrm{x}<\infty.$$

$L_M(\Omega)$ — обобщенное пространство Музилака-Орлича, определяется как наименьшее линейное пространство, которое содержит класс $\mathcal{L}_M(\Omega)$, с нормой Люксембурга

$$\|u\|_{M,\Omega}=\inf\left\{\lambda>0\;\middle|\;\varrho_{M,\Omega}\left(\frac{v}{\lambda}\right)\leq 1\right\}.$$

$E_M(\Omega)$ — замыкание по норме $\|u\|_{M,\Omega}$ ограниченных измеримых функций с компактным носителем в $\overline{\Omega}$.

Определим пространство Музилака-Орлича-Соболева

$$W^1L_M(\Omega)=\{v\in L_M(\Omega)\;\big|\;|\nabla v|\in L_M(\Omega)\},$$

Пространство $\mathring{W}^1L_M(\Omega)$ определим как замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по топологии $\sigma((L_M(\Omega))^{n+1},(E_{\overline{M}}(\Omega))^{n+1})$ в $W^1L_M(\Omega)$.

Предполагается, что функции

$$\mathrm{a}(\mathrm{x},s_0,\mathrm{s}):\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,\quad b(\mathrm{x},s_0,\mathrm{s}):\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},$$

входящие в уравнение (1), измеримы по $\mathrm{x}\in\Omega$ для $\mathbf{s}=(s_0,\mathrm{s})=(s_0,s_1,\ldots,s_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$, непрерывны по $\mathbf{s}\in\mathbb{R}^{n+1}$ для почти всех $\mathrm{x}\in\Omega$ и выполнено

Условие М. Для любого фиксированного $\mathrm{w}\in\mathbb{R}^n$, существуют неотрицательные функции Ψ, $\phi\in L_1(\Omega)$ и положительные константы $\widehat{A},\overline{a},\overline{d},\widehat{d}$ такие, что для п.в. $\mathrm{x}\in\Omega$ и для любых $s_0\in\mathbb{R}$, $\mathrm{s},\mathrm{t}\in\mathbb{R}^n$, $\mathrm{s}\neq\mathrm{t}$ справедливы неравенства:

$$\mathrm{a}(\mathrm{x},s_0,\mathrm{s})\cdot(\mathrm{s}-\mathrm{w})\geq\overline{a}M(\mathrm{x},\overline{d}|\mathrm{s}|)-\phi(\mathrm{x});$$

$$\overline{M}(\mathrm{x},|\mathrm{a}(\mathrm{x},s_0,\mathrm{s})|)\leq\Psi(\mathrm{x})+\widehat{A}P(\mathrm{x},\widehat{d}s_0)+\widehat{A}M(\mathrm{x},\widehat{d}|\mathrm{s}|));$$

$$(\mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{t})) \cdot (\mathrm{s} - \mathrm{t}) > 0.$$

Здесь функции Музилака-Орлича $P(\mathrm{x}, z)$, $P \prec\prec M$, $M(\mathrm{x}, z)$ подчиняются условию $(M1)$, непрерывно дифференцируемая функция $M(\mathrm{x}, z)$ удовлетворяет требованиям $(M2)$, $(M3)$, дополнительная к M функция $\overline{M}(\mathrm{x}, z)$ удовлетворяет Δ_2-условию и условию $(M1)$, $\mathrm{s} \cdot \mathrm{t} = \sum_{i=1}^{n} s_i t_i$, $|\mathrm{s}| = \left(\sum_{i=1}^{n} s_i^2\right)^{1/2}$.

Кроме того, пусть существует неотрицательная функция $\Phi_0 \in L_1(\Omega)$, непрерывная неубывающая функция $\widehat{b} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такие, что при п.в. $\mathrm{x} \in \Omega$, для всех $s_0 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{s} \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства:

$$|b(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})| \leq \widehat{b}(|s_0|) \left(M(\mathrm{x}, \overline{d}|\mathrm{s}|) + \Phi_0(\mathrm{x})\right);$$

$$b(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) s_0 \geq 0.$$

Условиям M удовлетворяют, например, функции

$$a_i(\mathrm{x}, \mathrm{s}) = M'(\mathrm{x}, |\mathrm{s}|) \frac{s_i}{|\mathrm{s}|} + f_i(\mathrm{x}), \quad f_i \in L_{\overline{M}}(\Omega), \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$b(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) = b(s_0) \overline{R}^{-1}(M(\mathrm{x}, |\mathrm{s}|)) R^{-1}(\Phi_0)$$

с непрерывной неубывающей нечетной функцией $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, произвольной N-функцией $R(z)$ и неотрицательной функцией $\Phi_0 \in L_1(\Omega)$.

Определим функцию $T_k(r) = \max(-k, \min(k, r))$. Через $\mathring{\mathcal{T}}_M^1(\Omega)$ обозначим множество измеримых функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$ таких, что $T_k(u) \in \mathring{W}^1 L_M(\Omega)$ при любом $k > 0$. Введем обозначение $\langle u \rangle = \int\limits_{\Omega} u d\mathrm{x}$.

Определение 2. Энтропийным решением задачи (1), (2) называется функция $u \in \mathring{\mathcal{T}}_M^1(\Omega)$ такая, что

1) $b(\mathrm{x}, u, \nabla u) \in L_1(\Omega)$;

2) при всех $k > 0, \xi \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство:

$$\langle (b(\mathrm{x}, u, \nabla u) + M'(\mathrm{x}, u) - f) T_k(u - \xi) \rangle + \langle \mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u - \xi) \rangle \leq 0.$$

Определение 3. Ренормализованным решением задачи (1), (2) называется функция $u \in \mathring{\mathcal{T}}_M^1(\Omega)$ такая, что

1) $b(\mathrm{x}, u, \nabla u) \in L_1(\Omega)$;

2) $\lim\limits_{h \to \infty} \int\limits_{\{\Omega : h \leq |u| < h+1\}} M(\mathrm{x}, \overline{d}|\nabla u|) d\mathrm{x} = 0$;

3) для любой гладкой функции $S \in W^1_\infty(\mathbb{R})$ с компактным носителем и любой функции $\xi \in C^1_0(\Omega)$ справедливо равенство:

$$\langle (b(\mathrm{x}, u, \nabla u) + M'(\mathrm{x}, u) - f) S(u)\xi\rangle + \langle \mathrm{a}(\mathrm{x}, u, \nabla u) \cdot (S'(u)\xi\nabla u + S(u)\nabla\xi)\rangle = 0.$$

Определение 4. Область Ω подчиняется сегментному свойству, если существует конечное открытое покрытие $\{\Theta_i\}_{i=1}^k$ множества $\overline{\Omega}$ и соответствующие ненулевые векторы $\mathrm{z}_i \in \mathbb{R}^n$ такие, что $(\overline{\Omega} \bigcap \Theta_i) + t\mathrm{z}_i \subset \Omega$ для любых $t \in (0,1)$ и $i = \overline{1,k}$.

Основным результатом работы являются

Теорема 1. *Пусть область Ω подчиняется сегментному свойству и выполнены условия M, тогда существует энтропийное решение задачи (1), (2).*

Теорема 2. *Пусть область Ω подчиняется сегментному свойству и выполнены условия M, тогда энтропийное решение, построенное в теореме 1, является ренормализованным решением задачи (1), (2).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *I. Chlebicka* Measure data elliptic problems with generalized Orlicz growth // Preprint https://www.researchgate.net/deref/http, 2020.

2. *P. Gwiazda, I. Skrzypczaka, A. Zatorska-Goldstein* Existence of renormalized solutions to elliptic equation in Musielak-Orlicz space // J. Differential Equations, **264** (2018), 341–377.

3. *M. Ait Khellou, A. Benkirane* Renormalized solution for nonlinear elliptic problems with lower order terms and L^1 data in Musielak-Orlicz spaces // Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series, **43**:2 (2016), 164–187.

4. *M. S. B. Elemine Vall, T. Ahmedatt, A. Touzani, A. Benkirane* Existence of entropy solutions for nonlinear elliptic equations in Musielak framework with L^1 data // Bol. Soc. Paran. Mat., **36**:1 (2018), 125–150.

5. *R. Elarabi, M. Rhoudaf, H. Sabiki* Entropy solution for a nonlinear elliptic problem with lower order term in Musielak–Orlicz spaces // Ricerche mat., 2017, 1–31.

6. *M. Ait Khellou, S. M. Douiri and Y. El Hadfi* Existence of Solutions for Some Nonlinear Elliptic Equations in Musielak Spaces with Only the Log-H *ö* lder Continuity Condition // Mediterr. J. Math., 2020, 1–18.

УДК 517.956.32

ПОСТРОЕНИЕ БЫСТРО СХОДЯЩЕГОСЯ РЯДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ

Ломов И.С.
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия;
lomov@cs.msu.ru

Решена смешанная задача для телеграфного уравнения в полуполосе. Рассмотрен случай существенно несамосопряженного оператора по пространственной переменной. Решение (как классическое, так и обобщенное) представляет собой быстро сходящийся ряд – обобщенную формулу Даламбера. Предложенный подход заменяет традиционный метод разделения переменных решения смешанных задач, приводящий, как правило, к медленно сходящимся рядам.

Ключевые слова: телеграфное уравнение, смешанная задача, контурный интеграл, обобщенная формула Даламбера, метод Фурье, метод Хромова.

CONSTRUCTION OF A RAPIDLY CONVERGING SERIES FOR SOLVING A MIXED PROBLEM FOR THE TELEGRAPH EQUATION

Lomov I.S.
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;
lomov@cs.msu.ru

A mixed problem for the telegraph equation in the half-band is solved. The case of an essentially non-self-adjoint operator with respect to a spatial variable is considered. The solution (both classical and generalized) is a rapidly converging series — a generalized D'Alembert formula. The proposed approach replaces the traditional method of separating variables for solving mixed problems, which , as a rule, leads to slowly converging series.

Key words: telegraph equation, mixed problem, contour integral, generalized d'Alembert formula, Fourier method, Khromov method.

Ряд математических моделей, используемых в задачах теории звука (упругости), света, электричества и магнетизма, содержат так называемое телеграфное уравнение $u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) - q(x)u(x,t)$. Ставится смешанная задача. В простейшем случае, когда $q(x) = const$, решение этой задачи можно записать в виде известной формулы Даламбера. В общем случае решение можно найти методом Фурье — в виде ряда, методом функции Грина — в виде интеграла, либо применить итерационные или численные методы. Каждый из этих методов накладывает свои ограничения на исходные данные задачи. Причем до недавнего времени считалось, что метод Фурье является одним из самых "затратных" методов в плане требований на параметры задачи. Это связано с необходимостью двукратного почленного дифференцирования рядов, представляющих решение задачи.

Первым, кто строго обосновал и начал систематически применять метод Фурье, был В.А. Стеклов. Он называл его обобщенным методом Эйлера-Бернулли или методом Ляме-Фурье и считал, что освободиться от завышенных требований на исходные данные задачи затруднительно.

Важную идею, позволившую в итоге освободиться от завышенных требований гладкости на исходные данные задачи, высказал академик А.Н. Крылов. Он предложил выделять из ряда Фурье часть, допускающую явное нахождение его суммы, так, чтобы оставшаяся часть ряда быстро сходилась и допускала нужное количество почленных дифференцирований. Тогда первую часть ряда, сумму которого нашли, можно дифференцировать без накладывания дополнительных условий гладкости на исходные данные задачи.

В.А. Чернятин приемом А.Н. Крылова успешно исследовал ряд задач методом Фурье и значительно ослабил условия гладкости исходных данных, а в ряде случаев эти условия стали минимально возможными. Однако, он рассмотрел только первую краевую задачу и самосопряженные операторы по пространственной переменной.

Новый метод, позволивший совершить качественный скачок в исследовании рассматриваемых смешанных задач, предложил А.П. Хромов [1, 2]. За основу взят резольвентный метод — метод Коши-Пуанкаре контурного интегрирования. Активно используется идея академика А.Н. Крылова расщепления ряда на точно вычисляемую часть и быстро сходящуюся часть. Причем этот прием применяется счетное число раз, что приводит к обобщенной формуле Даламбера для решения задачи. Ряд формальных сложностей удалось преодолеть благодаря привлечению идеи Л. Эйлера о работе с расходящимися рядами. Все это позволило создать очень экономичный метод в плане привлечения внешних математических фактов для проведения необходимых преобразований.

Рассмотрим смешанную задачу для телеграфного уравнения (здесь и далее обозначено $u_x(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, u_{xx}(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ и т.д.)

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) - q(x)u(x,t), \quad (x,t) \in Q = (0,1) \times (0,\infty), \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(0,t) = u_x(1,t), \quad t \geq 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,1], \tag{3}$$

$q(x)$, $\varphi(x)$ — комплекснозначные, интегрируемые на $(0,1)$ функции, $q(x), \varphi(x) \in \mathcal{L}(0,1)$.

Обозначим через $R^0_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ — резольвенту оператора L_0, $\lambda = \varrho^2$, $Re\,\varrho \geq 0$, E - единичный оператор. Пусть $y = R^0_\lambda g$, тогда y является решением задачи

$$-y''(x) - \varrho^2 y(x) = g(x), \, x \in (0,1), \, y(0) = 0, \, y'(0) = y'(1).$$

Решив эту задачу, получим

$$R^0_\lambda g(x) = -\frac{\sin \varrho x}{2\varrho \sin^2 \frac{\varrho}{2}} \int\limits_0^1 \cos \varrho(1-t) g(t) dt - \frac{1}{\varrho} \int\limits_0^x \sin \varrho(x-t) g(t) dt. \tag{4}$$

Решение задачи (1) — (3) при $q(x) = 0$ по методу Фурье запишем в виде

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geq 0} \int\limits_{\gamma_n} (R^0_\lambda \varphi) \cos \varrho t d\lambda, \tag{5}$$

где $\lambda = \varrho^2$, $Re\,\varrho \geq 0$, γ_n — образ в λ-плоскости окружности $\widetilde{\gamma}_n = \{\varrho : |\varrho - 2\pi n| = \delta\}$, $\delta > 0$ и достаточно мало, так что внутри γ_n находится по одному собственному значению оператора L_0 .

Подставив (4) в (5) и применив теорему о вычетах, получим

$$\begin{aligned} u_0(x,t) = \tfrac{1}{2}\big[&2(x+t)(1,\varphi) + 4\sum_{n=1}^{\infty}[(\varphi,(1-\tau)\sin 2\pi n\tau)\sin 2\pi n(x+t) + \\ &+(\varphi,\cos 2\pi n\tau)(x+t)\cos 2\pi n(x+t)] + \\ &+2(x-t)(1,\varphi) + 4\sum_{n=1}^{\infty}[(\varphi,(1-\tau)\sin 2\pi n\tau)\sin 2\pi n(x-t) + \\ &+(\varphi,\cos 2\pi n\tau)(x-t)\cos 2\pi n(x-t)]\big] = \tfrac{1}{2}[\widetilde{\varphi}(x+t) + \widetilde{\varphi}(x-t)], \end{aligned}$$

последнее равенство объясняется тем, что функция $\widetilde{\varphi}(x)$ имеет следующее разложение по рассматриваемой системе корневых функций:

$$\widetilde{\varphi}(x)=2x(1,\varphi)+4\sum_{n=1}^{\infty}[(\varphi,(1-\tau)\sin 2\pi n\tau)\sin 2\pi nx+(\varphi,\cos 2\pi n\tau)x\cos 2\pi nx].$$

Подставим $u_0(x,t)=\frac{1}{2}[\widetilde{\varphi}(x+t)+\widetilde{\varphi}(x-t)]$ в краевые условия (2). Получим два соотношения: $\widetilde{\varphi}(x)=-\widetilde{\varphi}(-x),\, x\in\mathbb{R}$, т. е. функция $\widetilde{\varphi}(x)$ — нечетная, и

$$\widetilde{\varphi}'(1+x)=2\widetilde{\varphi}'(x)-\widetilde{\varphi}'(1-x),\, x\in\mathbb{R}, \tag{6}$$

где учтено, что $\widetilde{\varphi}'(x)$ — четная функция.

Проинтегрируем равенство (6) по отрезку $[0,x]$, получим

$$\widetilde{\varphi}(1+x)=2\widetilde{\varphi}(x)+\widetilde{\varphi}(1-x),\, x\in\mathbb{R}, \tag{7}$$

Соотношение (7) позволяет продолжить функцию $\widetilde{\varphi}(x)=\varphi(x),\, x\in[0,1]$, с отрезка $[0,1]$ на полуось $x>0$.

Определение 1. *Под классическим решением задачи (1) — (3) будем понимать функцию $u(x,t)$, непрерывную и непрерывно дифференцируемую по x и t в полуполосе $\overline{Q}=[0,1]\times[0,\infty)$, причем функции $u_x(x,t),u_t(x,t)$ абсолютно непрерывны по $x\in[0,1]$ и $t\in[0,\infty)$ соответственно, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду в Q и условиям (2),(3).*

Обозначим $Q_T=(0,1)\times(0,T)$ для произвольного фиксированного числа $T>0$.

Определение 2. *Пусть последовательность $\{u_h(x,t)\}$ классических решений задачи (1) — (3), отвечающих начальным функциям $\{\varphi_h\}$, сходится по норме $\mathcal{L}(Q_T)$ к функции $u(x,t)$. Функцию $u(x,t)$ назовем обобщенным решением задачи (1) — (3).*

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Для того чтобы существовало единственное классическое решение $u(x,t)$ задачи (1) — (3), необходимо и достаточно, чтобы функции $\varphi(x),\varphi'(x)$ были абсолютно непрерывны на отрезке $[0,1]$ и $\varphi(0)=0,\varphi'(0)=\varphi'(1)$. Это решение дается формулой*

$$u(x,t)=A(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x,t), \tag{8}$$

где

$$a_0(x,t)=u_0(x,t)=\frac{1}{2}[\widetilde{\varphi}(x+t)+\widetilde{\varphi}(x-t)], \tag{9}$$

$$a_n(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\widetilde{f}_{n-1}(\eta,\tau)d\eta, \quad n=1,2,\dots, \tag{10}$$

$\widetilde{\varphi}(x)$ есть нечетное продолжение функции $\varphi(x)$ с отрезка $[0,1]$, определяемое соотношением (7), $\widetilde{f}_n(\eta,\tau)=f_n(\eta,\tau)=-q(\eta)a_n(\eta,\tau)$ при $\eta\in[0,1], n=0,1,\dots,$ $f_n(\eta,\tau)$ продолжается по переменной η с $[0,1]$ на всю прямую так же, как функция $\varphi(x)$, $\widetilde{f}_n(\eta,\tau)=$ $\widetilde{-q(\eta)}a_n(\eta,\tau)$.

Формулу (8) можно назвать обобщенной формулой Даламбера.

Теорема 2. *Если $\varphi\in\mathcal{L}(0,1)$, то ряд $A(x,t)$ (8) сходится абсолютно и равномерно (с экспоненциальной скоростью) в Q_T для любого $T>0$.*

Теорема 3. *Если $\varphi\in\mathcal{L}(0,1)$, а функции $\varphi_h(x), h=1,2,\dots,$ удовлетворяют условиям теоремы 1 и $\|\varphi_h-\varphi\|_1\to 0$ при $h\to\infty$, то соответствующие функциям $\varphi_h(x)$ классические решения $u_h(x,t)$ задачи (1) — (3) сходятся по норме $\mathcal{L}(Q_T)$ к $A(x,t)$, т. е. в этом случае $u(x,t)=A(x,t)$, ряд (8), является обобщенным решением задачи (1) — (3).*

Таким образом, из теорем 1 и 3 следует, что один и тот же ряд $A(x,t)$, быстро сходящийся, является классическим или обобщенным решением задачи (1) — (3), в зависимости от гладкости функции $\varphi(x)$.

Лемма. *Пусть $\varphi\in\mathcal{L}(0,1)$, T — произвольное положительное число. Тогда справедливы оценки*

$$\|a_n(x,t)\|_{C(\overline{Q}_T)}\le c_T^{n+1}\|q\|_1^n\|\varphi\|_1\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n\in\mathbb{N}, c_T=const. \tag{11}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хромов А.П., Корнев В.В.* Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59, № 2. С. 286-300.

2. *Хромов А.П.* Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы международн. Саратовской зимн. шк. (Саратов,

28 янв. — 1 февр. 2020). Саратов: Изд-во "Научная книга". 2020. С. 433-439.

УДК 517.95

ВЫЧИСЛЕНИЕ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ТИПА «КРИВАЯ КОХА»

Ляхов Л.Н.
Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия; levnlya@mail.ru

В работе приведено уравнение относительно параметра, называемого "положительной размерностью сферически симметричных областей евклидова пространства". Будут приведены графики размерностей самоподобных фракталов в $\mathbb{R}_2$ *(размерность "Снежинки Коха") и в* $\mathbb{R}_3$ *(размерность сферической снежинки Хэйнса, которая является трёхмерной версией снежинки Коха).*

Ключевые слова: сферическая симметрия, дробная размерность евклидовых множеств, фрактал, предфрактал, кривая Коха, сферическая снежинка Хэйнса.

CALCULATION OF THE FRACTAL DIMENSION OF THE KOCH CURVE TYPE

Lyakhov L.N.
Voronezh State University, Voronezh, Russia; levnlya@mail.ru

The paper presents an equation for a parameter called "the positive dimension of spherically symmetric regions of Euclidean space". The graphs of dimensions of self-similar fractals in $\mathbb{R}_2$ *(dimension of "Koch Snowflake") and in* $\mathbb{R}_3$ *(dimension of the spherical Haynes snowflake, which is a three-dimensional version of the Koch snowflake) will be given.*

Key words: spherical symmetry, fractional dimension of Euclidean sets, fractal, prefractal, Koch curve, spherical Haynes snowflake.

Понятие фрактала введено Б. Мандельбротом (подробности и философия этих определений содержит книга [1]). Одно из определений фрактала как структуры, состоящей "из частей, которые в каком-то смысле подобны целому" , является не только наиболее кратким, но и наиболее общим, поскольку позволяет иметь разные размерности "самоподобных" частей.

Кривая Коха — фрактальная кривая, описанная в 1904 году шведским математиком Хельге фон Кохом. Три копии кривой Коха, построенные (остриями наружу) на сторонах правильного треугольника, образуют замкнутую кривую бесконечной длины, называемую снежинкой Коха. Кривая Коха является типичным геометрическим фракталом. Процесс её построения выглядит следующим образом: берём единичный отрезок, разделяем на три равные части и заменяем средний интервал равносторонним треугольником без этого сегмента. В результате образуется ломаная, состоящая из четырёх звеньев длины $1/3$. На следующем шаге повторяем операцию для каждого из четырёх получившихся звеньев и т. д… Предельная кривая и есть кривая Коха.

Свойства кривой Коха:

- нигде не дифференцируема и не спрямляема.
- имеет бесконечную длину.
- не имеет самопересечений.
- плоскость допускает замощение снежинками Коха двух размеров. При этом не существует замощения снежинками одного размера

Кривая Коха имеет промежуточную (то есть не целую) хаусдорфову размерность, которая равна $\frac{ln4}{ln3} \approx 1,26$, поскольку она состоит из четырёх равных частей, каждая из которых подобна всей кривой с коэффициентом подобия $1/3$.

Л.Н. Ляхов предложил применить другую формулу для вычисления размерности предфракталов (в том числе кластеров), построенную на основе *определенного дробного интеграла Римана—Лиувилля* с мерой интегрирования со слабой особенностью (см. в [2] определение оператора Киприянова—Бельтрами). Общий вид этой формулы в евклидовом пространстве точек $\mathbb{R}_n$ с неотрицательной функцией (плотности) f следующий:

$$2^n|S_1^+(n)|_\gamma\int\limits_0^a f(t)t^{n+|\gamma|-1}dt \quad = \quad \Lambda(f,a)\,, \quad 2^n|S_1^+(n)|_\gamma \quad =$$

$2\pi^{(n-1)/2}\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n+\gamma)}$ где $\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$, $n+|\gamma|$ — искомая дробная размерность шара $|x| = t < a$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_n$, в котором каждая координата x_i имеет фрактальную размерность равную $1+\gamma_i,\ -1<\gamma_i<0$. Здесь правая часть уравнения имеет эмпирическое происхождение.

Для численного решения приведенного уравнения относительно размерности $n+|\gamma|$ были разработаны программы на языках python и matlab. Результаты вычислений по этим формулам привели к новому результату: *размерность предфрактального множества монотонно стремиться к размерности соответствующего фрактала, оставаясь больше этой размерности.* В докладе будут приведены графики размерностей самоподобных фракталов в $\mathbb{R}_2$ (размерность "Снежинки Коха") и в $\mathbb{R}_3$ (размерность сферической снежинки Хэйнса, которая является трёхмерной версией снежинки Коха). В этих графиках указаны прямые, отвечающие топологическим и евклидовым размерностям, соответствующих фракталов, и поточечные кривые их предфрактальных размерностей.

Возможны обобщения кривой Коха, также использующие при построении подстановку ломаной из четырёх равных отрезков, но имеющей иную геометрию. Они имеют хаусдорфову размерность от 1 до 2. В частности, если вместо деления отрезка $1:1:1$ использовать золотое сечение $(\varphi:1:\varphi)$, то получившаяся кривая имеет отношение к мозаикам Пенроуза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы.- М.: Институт компьютерных исследований. 2002. 656 с.

2. *Ляхов Л.Н., Санина Е.Л.* Оператор Киприянова-Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B-гармонического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2020. Т.56. № 12. С. 1564–1574.

3.*Ляхов Л.Н.* Построение ядер Дирихле и Валле-Пусена—Никольского для j-бесселевых интегралов Фурье. Москва.: Тр. Московского Математ. Общества. 2015. Т.76. № 1. С. 67–84.

УДК 517.95

ON A PROBLEM FOR THE MIXED TYPE EQUATION WITH THE DIFFERENTIAL OPERATOR FRACTIONAL ORDER

Matchanova A.A.
Institute of Ion-Plasma and Laser Technologies of Uzbekistan Academy of Sciences named after U.A. Arifov
oygul87-87@mail.ru

Abstract: *This work devoted to unequivocal solvability of local problem for the loaded parabolic-hyperbolic type equation third order involving Caputo derivatives. Considering problem involves third boundary condition on the parabolic domain and continuous gluing condition on the line* $x = 0$ *.*

Key words: *loaded equation, parabolic-hyperbolic type, Caputo derivatives, third order, third boundary condition, integral equations.*

Let Ω be one connected domain, restricted by segments $BB_0,\ B_0A_0,\ A_0A$ (accordingly on the lines $x = 1,\ y = 1,\ y = 0$) and by the characteristics $AC:\ x + y = 0,\ BC:\ x - y = -1$ of the wave equation, with $A(0, 0),\ B(1, 0)$ and $C\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Introduce designations: $\Omega_1 = \Omega \cap \{x > 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{x < 0\} = \left\{(x, y) : -\frac{1}{2} < x < 0, -x < y < x - 1.\right\}$.

In the formulated domain Ω, we consider the equation

$$(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c)Lu = 0 \tag{1}$$

where

$$Lu \equiv \begin{cases} L_1 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - {}_cD^{\alpha}_{0y}u; & (x, y) \in \Omega_1 \\ L_1 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}; & (x, y) \in \Omega_2 \end{cases}$$

and ${}_cD^{\alpha}_{ay}$ is the partial Caputo fractional derivative of order $0 < \alpha < 1$ of a function $u(x, y)$ with respect to the second variable [1]:

$${}_cD^{\alpha}_{oy}f(y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^y (y-t)^{-\alpha} f'(t)dt,$$

α, a, b, c are given constants, and that $0 < \alpha < 1$.

We will enter definition of regular (classical) solution of the Eq.(1) which will be needed further on :

Definition. A function $u(x, y)$ is said a regular solution of the Eq.(1), if $u(x, y)$ has continuously derivatives entering to operator Lu and ${}_C D_{oy}^{\alpha} u \in C\left(\overline{\Omega}_1\right)$, moreover $Lu \in C^1(\Omega)$

In the domain Ω for the Eq.(1) we will formulate and investigate this:

Problem A . To find a function $u(x, y)$, with following properties:

1) $u(x, y) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ is a regular solution of Eq.(1) in Ω at $y \neq 0$;

2) $u(x, y)$ satisfies boundary conditions:

$$\alpha_1 u(1, y) + \alpha_2 u_x(1, y) = \varphi_1(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = \psi_1(x) \quad 0 \leqslant y < 1, \tag{3}$$

$$u\,|_{AC} = \varphi_2(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\,|_{AC} = \varphi_3(y), \quad 0 \leqslant y < \frac{1}{2}, \tag{5}$$

$$\lim_{y \to +0} {}_c D_{0y}^{\alpha} u(x, y) = \psi_2(x), \tag{6}$$

3) on the line of change AB, for the $u(x, y)$ takes place gluing conditions:

$$u_x(+0, y) = \lambda_1(y) u_x(-0, y) + \lambda_2(y) u_y(-0, y) + \lambda_3(y) u(0, y) + \lambda_4(y) \tag{7}$$

$$u_{xx}(-0, y) = u_{xx}(+0, y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1; \tag{8}$$

where n is an internal normal and $\lambda_i(x)$, $\varphi_j(y)$, $\psi_k(x)(i = \overline{1,4},\ j = \overline{1,3},, k = 1, 2)$ are given functions, moreover $\psi_1(0) = \varphi_1(0)$.

Well known, that similar problems for the equation (1) with an integer-order parabolic operator were studied in [2], [3]. It should be noted that the **Problem A.** formulated for the equation (1) with the parabolic operator fractional order, on other hand with the third boundary condition on the parabolic domain.

We enter designations,

$$u(-0, y) = u(+0, y) \equiv \tau(y) \quad 0 \leqslant y \leqslant 1; \tag{9}$$

$$u_x(-0, y) = \nu^-(y), \ \ u_x(+0, y) = \nu^+(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1; \tag{10}$$

$$u_{xx}(-0, y) = u_{xx}(+0, y) = \mu(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1. \tag{11}$$

As we know, assuming

$$u(x,y)=\begin{cases} u_1(x,y), & (x,y)\in\Omega_1 \\ u_2(x,y), & (x,y)\in\Omega_2 \end{cases}$$

we can rewrite Eq.(1), as the two system of equations:

$$\begin{cases} u_{1xx} -{}_c D_{0y}^{\alpha} u_1 = \upsilon_1(x,y) \\ a\upsilon_{1x}+b\upsilon_{1y}+c\upsilon_1=0 \end{cases} \qquad (x,y)\in\Omega_1 \tag{12}$$

$$\begin{cases} u_{2xx} - u_{2yy} = \upsilon_2(x,y) \\ a\upsilon_{2x}+b\upsilon_{2y}+c\upsilon_2=0 \end{cases} \qquad (x,y)\in\Omega_2 \tag{13}$$

where $\upsilon_1(x,y)$, $\upsilon_2(x,y)$ are any smooth functions. Based on the general solution of the equation $a\upsilon_{ix}+b\upsilon_{iy}+c\upsilon_i=0$, $(i=1,\,2)$ we can consider following equations:

$$u_{1xx} - {}_cD_{0y}^{\alpha}u_1 \;= w_1(bx-ay)\exp\left(-\frac{cy}{b}\right), \tag{14}$$

$$u_{2xx} - u_{2yy} \;= w_2(bx-ay)\exp\left(-\frac{cy}{b}\right). \tag{15}$$

where w_i $(i=1,\,2)$ are any continuous functions.

From the solution of the Cauchy problem for Eq.(15) in Ω_2, based on the conditions (4) and (5), owing to $(u_x+u_y)|_{AC}=\sqrt{2}\varphi_3(x)$, we will receive, respectively

$$\nu^-(y)=\tau'(y)-\varphi_2'\left(\frac{y}{2}\right)+$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^y w_2\left(\frac{b-a}{2}\xi+\frac{b+a}{2}x\right)\exp\left(-\frac{c(\xi+\eta)}{2b}\right)d\xi, \tag{16}$$

and

$$w_2(z)=-\sqrt{2}\varphi_3'\left(\frac{z}{2b}\right)\exp\left(-\frac{cz}{b^2}\right) \tag{17}$$

On the other hand, by virtue (3) and (6) at $y\to+0$ from the Eq.(14), we can find

$$\omega_{12}\,(bx)=[\psi_1''\,(x)-\psi_2(x)]$$

Further, applying condition (8),from the equations (14) and (15), we get

$${}_cD_{0y}^{\alpha}\tau(y)\; + w_{11}(-ay)\exp\left(-\frac{cy}{b}\right)=\tau''(y)+w_2(-ay)\exp\left(-\frac{cy}{b}\right) \tag{18}$$

Considering designations from the gluing condition (7), we have

$$\nu^{+}(y) = \lambda_1(y)\nu^{-}(y) + \lambda_2(y)\tau'(y) + \lambda_3(y)\tau(y) + \lambda_4(y) \tag{19}$$

To get other main functional relations we use a solution of the first boundary boundary value problem for the Eq (14) in the domain Ω_1 and the third boundary conditions (2). Considering all main functional relations including (16), (18) and (19), we will get the system of Volterra type integral equations. On the certain conditions to the given functions we will prove unique solvability of the resulting system of integral equations

REFERENCES

1. Pskhu A.V. Solution of boundary value problems fractional diffusion equation by the Green function method // Diff. Equa. 2003. Vol. 39. №10. P. 1509–1513.

2. Djuraev T.Dj., Sopuyev A., Mamajanov A. Krayevie zadachi dlya uravneniya parabolo-giperbolicheskoga typa. Tashkent: Fan, 1979 (in Russian).

3. Mamajanov M. Kholmuratov D. Krayevie zadachi dlya uravneniya parabolo-giperbolicheskoga typa tretyego poryadka // Diff. Equa. 1989. Vol. 25. №2. P. 271–275 (in Russian).

УДК 517.956

К ЗАДАЧЕ ДАРБУ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Миронов А.Н. [1, 2]**, Миронова Л.Б.** [1]

[1] *Елабужский институт Казанского (Приволжского) федерального университета, г. Елабуга, Россия;*

[2] *Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия;*

miro73@mail.ru, lbmironova@yandex.ru

Для одного класса гиперболических систем доказаны существование и единственность решения задачи Дарбу. Определена матрица

Римана — Адамара задачи Дарбу. В терминах предложенной матрицы Римана — Адамара построено решение задачи Дарбу в явном виде.

Ключевые слова: гиперболическая система, задача Дарбу, метод Римана, матрица Римана — Адамара.

ON THE DARBOUX PROBLEM FOR HYPERBOLIC SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Mironov A.N. [1, 2], **Mironova L.B.** [1]

[1] *Yelabuga Institute of Kazan (Volga Region) Federal University, Yelabuga, Russia;*

[2] *Samara State Technical University, Samara, Russia;*

miro73@mail.ru, lbmironova@yandex.ru

For one class of hyperbolic systems, the existence and uniqueness of the solution of the Darboux problem are proved by variables. The Riemann — Hadamard matrix of the Darboux problem is defined. In terms of the proposed Riemann — Hadamard matrix, an explicit solution of the Darboux problem is constructed.

Key words: hyperbolic system, Darboux problem, Riemann method, Riemann — Hadamard matrix.

Система уравнений первого порядка

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x_1, \ldots, x_n) u_k + f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (1)$$

исследовалась многими авторами [1], [2], [3]. Система (1) представляет интерес, в частности, с точки зрения применения получаемых результатов к изучению важных в теоретическом и практическом отношении дифференциальных уравнений смешанного типа. Отметим, что наибольшее число публикаций относится к случаю, когда в (1) $n = 2$.

В работе [4] предложен вариант метода Римана для гиперболических систем дифференциальных уравнений, в терминах матрицы Римана построены решения задач Коши и Гурса. Решение задачи Дарбу для системы (1) с двумя независимыми переменными построено в терминах матрицы Римана — Адамара в статье [5].

Здесь для системы вида (1) предложен метод решения задачи Дарбу, являющийся определенным развитием метода Римана, который естественно назвать методом Римана — Адамара.

Рассмотрим гиперболическую систему вида (1) с тремя независимыми переменными

$$\begin{cases} u_x = a_{11}(x,y,z)u + a_{12}(x,y,z)v + a_{13}(x,y,z)w + f_1(x,y,z), \\ v_y = a_{21}(x,y,z)u + a_{22}(x,y,z)v + a_{23}(x,y,z)w + f_2(x,y,z), \\ w_z = a_{31}(x,y,z)u + a_{32}(x,y,z)v + a_{33}(x,y,z)w + f_3(x,y,z). \end{cases} \tag{2}$$

Линейное преобразование искомых функций приводит (2) к случаю, когда $a_{11} = a_{22} = a_{33} \equiv 0$. Считаем эти условия выполненными.

Пусть D — область, ограниченная плоскостями $x = 0$ (AA_1O_1O), $y = 0$ (AOB), $y = y_0 > 0$ ($A_1O_1B_1$), $z = x$ (OBB_1O_1), $z = z_0 > 0$. Считаем, что коэффициенты системы (2) удовлетворяют условиям гладкости $a_{ij} \in C(\overline{D})$, $f_i \in C(\overline{D})$, $i,\, j = \overline{1,\,3}$. Обозначим через X, Y, T грани D при $x=0$, $y=0$, $z=x$ соответственно.

Определим класс функций $C^{(k,l,m)}$ следующим образом: функция $f \in C^{(k_1,k_2,k_3)}$, если существуют непрерывные производные $\dfrac{\partial^{r_1+r_2+r_3} f}{\partial x^{r_1} \partial y^{r_2} \partial z^{r_3}}$ $(r_i = 0, \ldots, k_i)$. Решение класса $u \in C^{(1,0,0)}(D)$, $v \in C^{(0,1,0)}(D)$, $w \in C^{(0,0,1)}(D)$ назовем регулярным в области D.

Задача Дарбу. *В области D найти регулярное решение системы (2), удовлетворяющее граничным условиям*

$$\begin{gathered} u|_{\overline{X}} = \varphi_1(y,z), \quad v|_{\overline{Y}} = \varphi_2(x,z), \quad w|_{\overline{T}} = \psi(x,y), \\ \varphi_1 \in C(\overline{X}), \quad \varphi_2 \in C(\overline{Y}), \quad \psi \in C(\overline{T}). \end{gathered} \tag{3}$$

Методом интегральных уравнений доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Если выполняются условия $a_{ij} \in C(\overline{D})$, $f_i \in C(\overline{D})$, $i,\, j = \overline{1,\,3}$, то решение задачи Дарбу (2), (3) существует и единственно.*

Построено решение задачи Дарбу в терминах матрицы, аналогичной матрице Римана — Адамара, которая была определена в работе [5].

Аналогичные результаты получены для системы (1) в общем случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А.В.* О структурных свойствах решений гиперболических систем уравнений с частными производными // Матем. моделирование. 1994. Т. 6, № 6. С. 22–31.

2. *Чекмарев Т.В.* Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18, № 9. С. 1614–1622.

3. *Плещинская И.Е.* Об эквивалентности некоторых классов эллиптических и гиперболических систем первого порядка и уравнений второго порядка с частными производными // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23, № 9. С. 1634–1637.

4. *Миронова Л.Б.* О методе Римана в R^n для одной системы с кратными характеристиками // Известия вузов. Математика. 2006. № 1. С. 34–39.

5. *Mironova L.B.* Boundary-value Problems with Data on Characteristics for Hyperbolic Systems of Equations // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41, No. 3. Pp. 400–406.

УДК 517.956

К ВОПРОСУ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИИ РИМАНА — АДАМАРА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ БИАНКИ

Миронов А.Н. [1 2]**, Яковлева Ю.О.** [2]

[1] *Елабужский институт Казанского (Приволжского) федерального университета, г. Елабуга, Россия;*

[2] *Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия;*

miro73@mail.ru, julia.yakovleva@mail.ru

Для уравнений Бианки приведены постановки задач Дарбу. Опираясь на возможность представления функции Римана в явном виде для классов эквивалентных по функции уравнений Бианки, предложены достаточные условия на коэффициенты уравнений Бианки, обеспечивающие построение функции Римана — Адамара в терминах гипергеометрических функций.

Ключевые слова: уравнение Бианки, задача Дарбу, функция Римана — Адамара, функция Римана, инварианты Лапласа.

ON THE CONSTRUCTION OF THE RIEMANN — HADAMARD FUNCTION FOR THE BIANCHI EQUATIONS

Mironov A.N. [1, 2], **Yakovleva Yu.O.** [2]
[1] *Yelabuga Institute of Kazan (Volga Region) Federal University, Yelabuga, Russia;*
[2] *Samara State Technical University, Samara, Russia;*
miro73@mail.ru, julia.yakovleva@mail.ru

Formulations of the Darboux problems for the Bianchi equations are given. Based on the possibility of representing the Riemann function explicitly for function-equivalent classes of Bianchi equations, sufficient conditions are proposed for the coefficients of the Bianchi equations that provide the construction of the Riemann — Hadamard function in terms of hypergeometric functions.

Key words: Bianchi equation, Darboux problem, Riemann — Hadamard function, Riemann function, Laplace invariants.

Речь идет об уравнениях Бианки третьего и четвертого порядков [1], [2].

Рассмотрим уравнение Бианки третьего порядка

$$u_{xyz} + a(x,y,z)u_{xy} + c(x,y,z)u_{xz} + b(x,y,z)u_{yz} + d(x,y,z)u_x +$$

$$+ e(x,y,z)u_y + f(x,y,z)u_z + g(x,y,z)u = h(x,y,z). \tag{1}$$

Функция Римана — Адамара задачи Дарбу для указанного уравнения рассматривалась, например, в работах [3]–[4]. В частности, в статье [3] доказаны существование и единственность решения задачи Дарбу для трехмерного уравнения Бианки, определена функция Римана — Адамара задачи Дарбу, построено решение задачи Дарбу в терминах функции Римана — Адамара.

Определим класс функций $C^{(k,l,m)}(D)$ следующим образом: функция $u \in C^{(k_1,k_2,k_3)}(D)$, если в области D существуют непрерывные производные $\dfrac{\partial^{r_1+r_2+r_3}u}{\partial x^{r_1}\partial y^{r_2}\partial z^{r_3}}$ $(r_i = 0,\ldots,k_i)$. Решение класса $C^{(1,1,1)}(D)$ назовем регулярным в D. Потребуем, чтобы коэффициенты уравнения (1) удовлетворяли включениям $a \in C^{(1,1,0)}(\overline{D})$, $c \in C^{(1,0,1)}(\overline{D})$, $b \in C^{(0,1,1)}(\overline{D})$, $d \in C^{(1,0,0)}(\overline{D})$, $e \in C^{(0,1,0)}(\overline{D})$, $f \in C^{(0,0,1)}(\overline{D})$, $g,\ h \in C^{(0,0,0)}(\overline{D})$.

Пусть D — область, ограниченная плоскостями $x=0$, $y=0$, $y=y_0>0$, $z=x$, $z=z_0>0$. Обозначим через X, Y, T грани D при $x=0$, $y=0$, $z=x$ соответственно.

Задача Дарбу. *В области D найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям*

$$\begin{gathered} u|_{\overline{X}}=\varphi_1(y,z), \quad u|_{\overline{Y}}=\varphi_2(x,z), \quad u|_{\overline{T}}=\psi(x,y), \\ \varphi_1(y,0)=\psi(0,y),\ \varphi_2(x,x)=\psi(x,0),\ \varphi_1(0,z)=\varphi_2(0,z), \\ \varphi_1\in C^{(1,1)}(\overline{X}), \quad \varphi_2\in C^{(1,1)}(\overline{Y}), \quad \psi\in C^{(1,1)}(\overline{T}). \end{gathered} \tag{1}$$

Возьмем внутри области D произвольную точку $P(\xi,\eta,\zeta)$. Она определяет область D_P, которая состоит из двух частей — параллелепипеда D_1 и призмы D_2.

Функция Римана — Адамара задачи Дарбу $H(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$ определяется следующим образом:

$$H(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)=\begin{cases} R(x,y,z,\xi,\eta,\zeta), & (x,y,z)\in D_1, \\ V(x,y,z,\xi,\eta,\zeta), & (x,y,z)\in D_2, \end{cases} \tag{2}$$

где R — функция Римана для уравнения (1), а функция V должна удовлетворять сопряженному к (1) уравнению

$$L^*(u)\equiv v_{xyz}-(a(x,y,z)v)_{xy}-(c(x,y,z)v)_{xz}-(b(x,y,z)v)_{yz}+$$

$$+(d(x,y,z)v)_x+(e(x,y,z)v)_y+(f(x,y,z)v)_z-g(x,y,z)v=0 \tag{3}$$

и дополнительным условиям, которые приводят к задаче Дарбу для уравнения (3) в области D_2. Получаем для функции V задачу Дарбу, решение которой существует и единственно. Таким образом, функция Римана — Адамара определена, существует и единственна в $\overline{D}$.

Получены достаточные условия на коэффициенты уравнения (1), обеспечивающие построение функции Римана — Адамара в явном виде (в терминах гипергеометрических функций). А именно, справедлива следующая теорема [4].

Теорема 1. *Если для уравнения (1) выполняются условия*

$$\begin{gathered} b_y\equiv c_x, \quad b_z\equiv a_x, \quad c_z\equiv a_y, \\ a_x+ab-e\equiv 0, \quad c_x+bc-f\equiv 0, \\ a_y+ac-d\equiv 0, \quad d_x+bd-g\equiv \varphi(x)\psi(y)\varphi(z), \end{gathered}$$

то функция Римана — Адамара дается формулой (2), где

$$R(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = E(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\,{}_0F_2\,(1,1;\omega)\,,$$

$$V(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = E(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)({}_0F_2\,(1,1;\omega) - {}_0F_2\,(1,1;\rho)),$$

$$E(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \exp\left(\int\limits_{\xi}^{x} b(\alpha,y,z)\,d\alpha + \int\limits_{\eta}^{y} c(\xi,\beta,z)\,d\beta + \int\limits_{\zeta}^{z} a(\xi,\eta,\gamma)\,d\gamma\right),$$

$$\omega = -\int\limits_{\xi}^{x} \varphi(\alpha)\,d\alpha \int\limits_{\eta}^{y} \psi(\beta)\,d\beta \int\limits_{\zeta}^{z} \varphi(\gamma)\,d\gamma.$$

$$\rho = -\int\limits_{\xi}^{z} \varphi(\alpha)\,d\alpha \int\limits_{\eta}^{y} \psi(\beta)\,d\beta \int\limits_{\zeta}^{x} \varphi(\gamma)\,d\gamma.$$

Функция Римана — Адамара для уравнения Бианки четвертого порядка определена в статье [5], где построено решение задачи Дарбу в терминах указанной функции. Доказана теорема, аналогичная теореме 1, обеспечивающая достаточные условия построения функции Римана — Адамара в четырехмерном пространстве независимых переменных в терминах гипергеометрических функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жегалов В.И., Миронов А.Н.* Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань: Изд-во Казанск. матем. общ-ва, 2001. 226 с.

2. *Жегалов В.И., Миронов А.Н., Уткина Е.А.* Уравнения с доминирующей частной производной. Казань: Казанский ун-т, 2014. 385 с.

3. *Миронов А.Н.* Задача Дарбу для уравнения Бианки третьего порядка // Математические заметки. 2017. Т. 102, вып. 1. С. 64–71.

4. *Миронов А.Н.* О построении функции Римана — Адамара для трехмерного уравнения Бианки // Известия вузов. Математика. 2021. № 3. С. 76–82.

5. *Миронов А.Н.* Задача Дарбу для уравнения Бианки четвертого порядка // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57, № 3. С. 349–363.

УДК 517.956.6

РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ТРИКОМИ СО СДВИГОМ

Мирсабурова У.М.
Термезкий государственного университета, г. Термез, Узбекистан; mirsaburov@mail.ru

Работа посвящена решению сингулярного интегрального уравнения типа Трикоми со сдвигом в несингулярной части ядра и с различным числовыми параметрами.

Ключевые слова: сингулярное интегралное уравнения, формулы Сохоцкого–Племеля, граничные значения, голоморфная функция.

SOLUTION OF A SINGULAR INTEGRAL EQUATION OF TRIKOMI TYPE WITH SHIFT

Mirsaburova U.M.
Termez State University of the Republic of Uzbekistan, Termez; mirsaburov@mail.ru

The work is devoted to solving the non-standard singular integral Tricomi equation with a shift in the nonsingular part of the kernel and with different numerical parameters.

Key words: non-standard singular integral equation, Sokhotski-Plemelj formulas, boundary values, holomorphic function.

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение вида

$$\rho(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{\alpha}{t-x}-\frac{\beta b}{1-(bx-a)(bt-a)}\right)\rho(t)dt=g(x),\;\; x\in I, \quad (1)$$

где $\alpha\neq\beta$ $a=(1+c)/2,\; b=(1-c)/2,\; a+b=1.$ Отличие уравнения (1) от уравнения Трикоми заключается в том, что здесь присутствуют параметры α и β, которые не равно между собой.

Теорема 1. *Если* $g_0(x)$ *удовлетворяет условию Гёльдера при* $x\in(-1,1)$ *и* $g_0(x)\in L_p(-1,1),\, p>1,$ *то решение уравнения (1) в классе* *функций H , в котором функция $\rho(x)$ может быть неограниченной в точке $x=-1$ и ограниченной при $x=1$, выражается формулой*

$$\rho(x)=\frac{g(x)}{1+\alpha^2}+\frac{1}{\pi(1+\alpha^2)}\int_{-1}^{1}\left(\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^2\left(\frac{1-x}{1-t}\right)\frac{(1-c(bx-a))}{(1-c(bt-a))}\right)^{\theta}\times$$

$$\times\left(\frac{\alpha}{t-x}+\frac{b\beta((1+\alpha i)/(1+\beta i))}{1-(bx-a)(bt-a)}\right)g(t)dt \qquad (2)$$

где $\theta\pi=arctg\alpha,\ 0<\theta<1/2$

Доказательство. Хотя метод доказательства теоремы 1 идентичен методом работы [1], [4] однако имеет ряд своих особенностей связанных с двумя различными параметрами α и β в уравнение (1).

Пусть $z-$ произвольная точка комплексной плоскости. Следуя подходу Карлемана, развитой С.Г. Михлиным [1] положим

$$\Phi(\alpha,\beta;z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\left(\frac{\alpha}{t-z}-\frac{\beta b}{1-(bz-a)(bt-a)}\right)\rho(t)dt$$

Очевидно, что функция $\Phi(\alpha,\beta;z)$ голоморфна как в верхней, так и в нижней полуплоскости и обрашаеться в нуль на бесконечности. Обозначим через $\Phi^+(\alpha,\beta;x)$ и $\Phi^-(\alpha,\beta;x)$ предельные значения функции $\Phi(\alpha,\beta;z)$, когда z стремится к точке x действительной оси соответсвенно из верхней или из нижней полуплоскости.

Нетрудно проверить, что имеет место равенство

$$\Phi\left(\alpha,\beta;\frac{1+a+az}{bz-a}\right)=(bz-a)\Phi\left(\beta,\alpha;z\right). \qquad (3)$$

Дробно– линейное преобразование $W(z)=(1+a+az)/(bz-a)$ переводить верхную полуплоскость в нижную и наоборот. При этом промежуток $(-1,1)$ переходить в промежуток Δ , равный $(-\infty,-1)\cup(-(2+c)/c,+\infty)$ если $c<0$ и $(-\infty,-1)$ если $c=0$, $(-(2+c)/c,-1)$ если $c>0$.

Формулы Сохоцкого- Племеля для функции $\Phi(\alpha,\beta;z)$ имеют вид

$$\Phi^{\pm}(\alpha,\beta;x)=\pm\frac{\alpha\rho(x)}{2}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\left(\frac{\alpha}{t-x}-\frac{\beta b}{1-(bx-a)(bt-a)}\right)\rho(t)dt, \qquad (4)$$

В силу (4) уравнение (1) имеет вид

$$\Phi^{+}(\alpha,\beta;x)-\frac{1+\alpha i}{1-\alpha i}\Phi^{-}(\alpha,\beta;x)=\frac{\alpha g(x)}{1-\alpha i},\quad x\in I. \qquad (5)$$

В (5) x поменяв на $W(x)$ затем поменяв местами α и β с учетом соотношения (3) получим

$$\Phi^{+}\left(\alpha,\beta;W(x)\right)-\frac{1-\beta i}{1+\beta i}\Phi^{-}\left(\alpha,\beta;W(x)\right)=-\frac{\beta}{1+\beta i}\frac{g(W(x))}{bx-a},\quad x\in\Delta. \qquad (6)$$

Таким образом, в силу (5) и (6), нахождение решение интегрального уравнения (1) приводиться к следующей задаче теории функции комплексной переменной: найти изчезающую на бесконечности функцию $\Phi(\alpha,\beta;z)$, голоморфную как в верхней, так и в нижней полуплоскости и удовлетворяюшую граничному условию

$$\Phi^{+}(\alpha,\beta;x)-G(x)\Phi^{-}(\alpha,\beta;x)=h(x),\quad x\in(-\infty,+\infty), \qquad (7)$$

где

$$G(x)=\begin{cases}\dfrac{1+\alpha i}{1-\alpha i}, & \text{при} \quad x\in I;\\ \dfrac{1-\beta i}{1+\beta i}, & \text{при} \quad x\in\Delta;\\ 1, & \text{при} \quad x\notin I\cup\Delta,\end{cases}\quad h(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha g(x)}{1-\alpha i}, & \text{при} \quad x\in I;\\ \dfrac{-\beta}{1+\beta i}\dfrac{g(W(x))}{bx-a}, & \text{при } x\in\Delta;\\ 0, & \text{при} \quad x\notin I\cup\Delta.\end{cases} \qquad (8)$$

С целью сведения задачи (7) к задаче о скачке функцию $G(x)$ представим в фактаризованном виде: $G(x)=X^{+}(x)/X^{-}(x)$ т.е.

$$X^{+}(x)-G(x)X^{-}(x)=0,\quad x\in I. \qquad (9)$$

Одно из частных решений однородной задачи с условием (9) имеет вид

$$X(z)=exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{b(bz-a)}{1-(bz-a)(bt-a)}\right)lnG(t)dt\right\}. \qquad (10)$$

где $\ln G(t)=\ln\frac{1+\alpha i}{1-\alpha i}=2iarctg\alpha=2\theta\pi i,\quad \theta\pi=arctg\alpha.$

Заметим, что $X(W(z))=X(z)$. Из равенства (10) легко вычислить граничные значения

$$X^{+}(x)=\left(\frac{(1-x)(1-c(bx-a))}{b(1+x)^{2}}e^{\pi i}\right)^{\theta},\ X^{-}(x)=\left(\frac{(1-x)(1-c(bx-a))}{b(1+x)^{2}}e^{-\pi i}\right)^{\theta}. \qquad (11)$$

Таким образом, в силу соотношения (9) граничное условие (7) запишется в виде

$$\frac{\Phi^+(\alpha,\beta;x)}{X^+(x)} - \frac{\Phi^-(\alpha,\beta;x)}{X^-(x)} = \frac{h(x)}{X^+(x)}, x \in (-\infty,+\infty), \tag{12}$$

одно из частных решений граничной задачи (12) о скачке (12) имеет вид

$$\frac{\Phi(\alpha,\beta;z)}{X(z)} = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{-1}^{1}\frac{h(t)dt}{X^+(t)(t-z)} + \int_{\Delta}\frac{h(t)dt}{X^+(t)(t-z)}\right]. \tag{13}$$

Во втором интеграле (13) сделав замену $t = W(s)$ с учетом выражения для $h(t)$ из (8) и тождеств имеем

$$\frac{\Phi(\alpha,\beta;z)}{X(z)} = \frac{1}{2\pi(1-\alpha i)i}\int_{-1}^{1}\frac{g(t)}{X^+(t)}\left(\frac{\alpha}{t-z} + \frac{b\beta((1+\alpha i)/(1+\beta i))}{1-(bz-a)(bt-a)}\right)dt.$$

Чтобы найти обшее решение уравнение (12), рассмотрим соответствуюшее однородное уравнение

$$\frac{\Phi^+(\alpha,\beta;x)}{X^+(x)} - \frac{\Phi^-(\alpha,\beta;x)}{X^-(x)} = 0.$$

Это уравнение показывает, что функция $\chi(z) = \dfrac{\Phi(\alpha,\beta;z)}{X(z)}$, голоморфна на всей плоскости кроме, может быть точек $z=-1$, $z=1$, которые могут быть только полюсами первого порядка. С учётом того, что эта функция исчезает на бесконечности на основании обобшенной теоремы Лиувилля об аналитическом продолжении имеем, что

$$\chi(z) = \frac{\alpha_1}{z+1} + \frac{\alpha_2}{z-1}.$$

Таким образом, общее решение неоднородной задачи (7) имеет вид

$$\Phi(\alpha,\beta;z) = \frac{X(z)}{2\pi(1-\alpha i)i}\int_{-1}^{1}\frac{g(t)}{X^+(t)}\left(\frac{\alpha}{t-z} + \frac{b\beta((1+\alpha i)/(1+\beta i))}{1-(bz-a)(bt-a)}\right)dt+$$

$$+\left(\frac{\alpha_1}{z+1} + \frac{\alpha_2}{z-1}\right)X(z). \tag{14}$$

Отсюда в силу формул Сохоцкого– Племеля (4) имеем

$$\alpha\rho(x)=\Phi^{+}(\alpha,\beta,x)-\Phi^{-}(\alpha,\beta,x)=\frac{1}{1-\alpha i}\left\{\left(1+\frac{X^{-}(x)}{X^{+}(x)}\right)\frac{\alpha g(x)}{2}+\right.$$

$$\left.+(X^{+}(x)-X^{-}(x))\int_{-1}^{1}\frac{g(t)}{X^{+}(t)}\left(\frac{\alpha}{t-z}+\frac{b\beta((1+\alpha i)/(1+\beta i))}{1-(bz-a)(bt-a)})\right)dt\right\}+$$

$$+\left(\frac{\alpha_1}{z+1}+\frac{\alpha_2}{z-1}\right)(X^{+}(x)-X^{-}(x)),\quad x\in I. \tag{15}$$

Далее с учетом формул (9), (11) соотношение (15) запишем в виде

$$\alpha\rho(x)=\frac{\alpha g(x)}{1+\alpha^2}+\frac{\alpha}{\pi(1+\alpha^2)}\left(\frac{(1-x)(1-c(bx-a))}{b(1+x)^2}\right)^{\theta}\times$$

$$\times\int_{-1}^{1}\left(\frac{b(1+t)^2}{(1-t)(1-c(bt-a))}\right)^{\theta}\left(\frac{\alpha}{t-z}+\frac{b\beta((1+\alpha i)/(1+\beta i))}{1-(bz-a)(bt-a)}\right)g(t)dt+$$

$$+2i\left(\frac{\alpha_1}{x+1}+\frac{\alpha_2}{x-1}\right)\left(\frac{(1-x)(1-c(bx-a))}{b(1+x)^2}\right)^{\theta}. \tag{16}$$

Здесь по допушению искомая функция $\rho(x)$ может иметь особенность порядки не выше единицы при $x=-1$, и должна быть ограниченной при $x=1$ тогда в (16) мы должны полагать, что $\alpha_1=0,\ \alpha_2=0$. Таким образом, в (16) полагая $\alpha_1=0,\alpha_2=0$ мы получим формулу (2), даюшее решение уравнения (1).

Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Михлин С.Г.* Об интегральном уравнении F.Trikomi // ДАН СССР. 1948. Т. 59. № 6. С. 1053–1056.

УДК 517.95

ЗАДАЧА БЕЗ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Псху А.В.
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия;
pskhu@list.ru

Построено решение задачи без начальных условий для диффузионно-волнового уравнения с дробной производной по времени, определенной на бесконечном интервале.

Ключевые слова: диффузионно-волновое уравнение, задача без начальных условий, производная Лиувилля.

PROBLEM WITHOUT INITIAL CONDITIONS FOR DIFFUSION-WAVE EQUATION

Pskhu A.V.
Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Nalchik, Russia;
pskhu@list.ru

The solution of the problem without initial conditions for the diffusion-wave equation with a fractional time derivative, defined on an infinite interval, is constructed.

Key words: diffusion-wave equation, problem without initial conditions, Liouville derivative.

В области $\Omega_T = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}^n,\, t < T\}$ рассматривается уравнение

$$\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} - \Delta_x\right) u(x,t) = f(x,t) \qquad (0 < \alpha < 2).$$

Здесь через $\partial^\alpha/\partial t^\alpha$ обозначена дробная производная порядка α по переменной t, с началом в точке $t = -\infty$ [1]. Для рассматриваемого уравнения построено решение задачи без начальных условий, найдены достаточные условия, обеспечивающие ее однозначную разрешимость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.

УДК 514.772

СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ПРОБЛЕМЕ ПАР БОННЕ В ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Сабитов И.Х.
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, г. Москва, Россия
isabitov@mail.ru

Решение проблемы Бонне о существовании компактных изометричных поверхностей с общей средней кривизной сводится к решению некоторой системы двух уравнений гиперболического типа, заданных на компактном многообразии. Даются некоторые условия, достаточные для отсутствия пар таких поверхностей.

Ключевые слова: проблема Бонне, пары Бонне, компактные поверхности, уравнения проблемы, признаки несуществования пар Бонне.

SYSTEMS OF HYPERBOLIC TYPE IN THE PROBLEM OF BONNET PAIRS IN THE SURFACE THEORY

Sabitov I.Kh.
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia,
isabitov@mail.ru

The solution of Bonnet problem on the existence of compact isometric surfaces with a common mean curvature is reduced to the solution of a hyperbolic system of two equations given in a compact manifold. Some sufficient conditions for the non-existence of Bonnet pairs of such surfaces are given.

Key words: Bonnet problem, Bonnet pairs, compact surfaces, equations of problem, non-existence criteria.

1. Проблема пар Бонне в теории поверхностей состоит в поиске изометричных поверхностей в $\mathbf{R}^3$, у которых, кроме метрики, общей является и средняя кривизна. В локальной постановке эта задача решена, можно сказать, в полном объеме, а для поверхностей в целом доказаны следующие утверждения:

В классе гладкости C^2 среди компактных поверхностей рода 0 (т.е.. гомеоморфных сфере) нет пар Бонне, а среди поверхностей рода $p \geq 1$ нет троек Бонне (в указанном минимально допустимом классе гладкости эти результаты доказаны в [1], там же есть ссылки на предыдущие работы по этой теме.

Следовательно, задача состоит или в доказательстве отсутствия пар Бонне (возможно, в зависимости от значения топологического рода рассматриваемых поверхностей или в построении примеров пар Бонне в компактном случае. Мы склоняемся к предположению, что при любом p пар Бонне нет.

2. Пусть метрика поверхности $S \in C^3$ задана в изотермических координатах (ξ, η) в виде

$$ds^2 = \Lambda^2(\xi, \eta)(d\xi^2 + d\eta^2) \tag{1}$$

и пусть в классических обозначениях

$$K = \frac{LN - M^2}{\Lambda^4},\ H = \frac{L + N}{2\Lambda^2}$$

- соответственно гауссова и средняя кривизны поверхности, а L, M, N - коэффициенты ее второй квадратичной формы. Если ввести обозначения

$$\zeta = \xi + \eta,\ f = 2\Lambda^2 \frac{\partial H}{\partial \zeta},\ g = 2(H^2 - K)\Lambda^4,\ \Omega = (L - N) - 2iM, \tag{2}$$

то окаж ется, что уравнения Петерсона-Кодацци принимают вид

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\zeta}} = f. \tag{3}$$

С использованием равенства $\Omega\bar{\Omega} = g$ получаем, что коэффициенты второй квадратичной формы выражаются через Λ, H и K следующим образом

$$L = H\Lambda^2 + \frac{1}{2} Re\Omega,\ M = -\frac{1}{2} Im\Omega,\ N = H\Lambda^2 - \frac{1}{2} Re\Omega,\ \Omega = \frac{B + i\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2\bar{A}}..$$

где

$$A = g\frac{\partial f}{\partial \zeta} - f\frac{\partial g}{\partial \zeta},\ B = g^2\frac{\partial^2 \ln g}{\partial\zeta\partial\bar{\zeta}} - 2gf\bar{f},\ \Delta = 4gA\bar{A} - B^2 \geq 0,$$

а $\varepsilon = \pm 1$. Таким образом, по данным Λ, H и K мы можем найти два значения Ω_1 и Ω_2 , причем значение ε должно изменяться при переходе через нули Δ и A так, чтобы $\Omega_{1,2}$ оставались гладкими функциями. Существование двух гладких $\Omega_{1,2}$ на компактном многообразии, где задана метрика (1), является необходимым условием существования пары Бонне. Так как обе функции Ω_1 и Ω_2 удовлетворяют уравнению (3), получаем, что их разность $\Omega_2 - \Omega_1 = \varphi$ является в каждой локальной карте голоморфной функцией, причем форма $\varphi d\zeta^2$ оказывается голоморфно квадратичным дифференциалом. Учитывая представление $\Omega_2 = \Omega_1 e^{i\theta}$, для функции $\Omega_1\zeta$ получаем равенство

$$\Omega_1 = -\frac{\varphi}{2} - \frac{i\varphi}{2}ctg\frac{\varphi}{2}.$$

Между φ и θ существует замечательная связь

$$\frac{\varphi\bar{\varphi}}{4\sin^2\frac{\theta}{2}} = g = 4(H^2 - K)\Lambda^4. \tag{4}$$

Положим $\alpha = ctg\frac{\varphi}{2}$. В [1] доказано, что на любой компактной паре Бонне эта функция положительна и ограничена, значит, она должна иметь положительные минимум и максимум. Из (3) получаем уравнение

$$-\frac{i\varphi}{2}\alpha_{\bar{\zeta}} = f = 2\Lambda^2 H_\zeta,$$

откуда приходим к системе

$$\begin{cases} H_\eta - \varphi_1\alpha_\eta - \varphi_2\alpha_\xi = 0 \\ H_\xi - \varphi_2\alpha_\eta + \varphi_1\alpha_\xi = 0. \end{cases}$$

где $\varphi_1 + i\varphi_2 = \frac{i\varphi}{4\Lambda^2}$. Эта система оказывается гиперболического типа (с вырождением в омбилических точках поверхности, если они есть). Находим ее характеристики. Они даются уравнениями

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\varphi_1 \pm \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}}{\varphi_2}.$$

Соотношение на характеристиках имеет вид

$$(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)d\xi d\alpha + (\varphi_1 d\xi - \varphi_2 d\eta)dH = 0.$$

Для поверхности топологического типа тора функция φ является постоянной, поэтому для нее характеристики системы представляют собой прямые, Известно. что для аналитических пар Бонне типа тора нет омбилических точек [1]. Учитывая это и соотношение (4), удается доказать, что функция α не достигает максимума, что приводит к теореме:

Теорема. *Для аналитических компактных поверхностей рода 1 пары Бонне не существует.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сабитов И.Х.* Изометричные поверхности с общей средней кривизной // Математический сборник. 2012. 203:1, С. 115-158.

.

УДК 517.95

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Смирнов Ю.Г.

Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия;
mmm@pnzgu.ru

Применен метод интегральных дисперсионных уравнений для решения нелинейной задачи на собственные значения, возникающей при изучении распространения поляризованных волн в диэлектрическом экранированном нелинейном слое. Нелинейность имеет место в том числе при старшей производной в дифференциальном операторе. Доказано существование бесконечного множества собственных значений задачи и получена их асимптотика.

Ключевые слова: нелинейные волны, собственные значения, асимптотика.

METHOD OF INTEGRAL DISPERSION EQUATIONS FOR SOLVING A NONLINEAR EIGENVALUE PROBLEM

Smirnov Y.G.
Penza State University, Penza, Russia;
mmm@pnzgu.ru

The method of integral dispersion equations is applied to solve a nonlinear eigenvalue problem that arises when studying the propagation of polarized waves in a dielectric shielded nonlinear layer. The nonlinearity also occurs with the highest derivative in the differential operator. The existence of an infinite set of eigenvalues of the problem is proved and their asymptotics are obtained.

Key words: nonlinear waves, eigenvalues, asymptotics.

Введение.

Нелинейные задачи на собственные значения встречаются, например, при изучении распространения поляризованных электромагнитных волн в нелинейных средах [1]. Одним из эффективных методов исследования нелинейных задач на собственные значения является метод интегральных дисперсионных уравнений [2]. В настоящей статье рассмотрены как известная задача на собственные значения, возникающая при изучении распространения TE-волн в диэлектрическом экранированном нелинейном слое с нелинейностью Керра, так и более сложная задача, когда нелинейность имеет место при старшей производной в дифференциальном операторе.

1. Метод интегральных дисперсионных уравнений.

Рассмотрим следующую нелинейную краевую задачу на собственные значения для дифференциального оператора 2-го порядка:

$$u'' - \lambda u + \alpha u^3 = 0, x \in (0,h) \tag{1}$$

с однородными краевыми условиями

$$u(0) = u(h) = 0, \tag{2}$$

и дополнительным условием

$$u'(0) = A, A > 0. \tag{3}$$

Будем искать гладкие вещественнозначные решения $u = u(x)$, $u \in C^2(0,h) \cap C^1[0,h]$. Коэффициент нелинейности $\alpha > 0$.

Задача на собственные значения состоит в нахождении таких $\lambda \in \mathbf{R}$, при которых (1) – (5) имеет нетривиальное решение из указанного выше класса функций.

Умножим уравнение (1) на $u'(x)$, получим $u'u'' - \lambda uu' + \alpha u'u^3 = 0$, откуда находим $((u')^2)' - \lambda(u^2)' + (u^4)'/2 = 0$, что влечет $(u')^2 - \lambda u^2 + \alpha u^4/2 = C_0$, где C_0 - некоторая константа. Учитывая непрерывную дифференцируемость функции $u(x)$, из условий (2) – (5) получаем $(u'(0))^2 = A^2 > 0$, $A^2 = C_0$. Тогда имеем

$$(u')^2 - \lambda u^2 + \alpha u^4/2 = A^2. \tag{4}$$

Из этого уравнения находим, что

$$u' = \pm\sqrt{A^2 + \lambda u^2 - \alpha u^4/2} \tag{5}$$

Последнее уравнение - лишь формальная запись, так как функция $u'(x)$ может менять знак на отрезке $[0, h]$ и выбор знака перед квадратным корнем пока не определен.

Пусть $D := \lambda^2 + 2\alpha A^2 (> 0)$. Обозначим $z_1 := \frac{\lambda+\sqrt{D}}{\alpha} (> 0)$, $z_2 := \frac{\lambda-\sqrt{D}}{\alpha} (< 0)$. Тогда

$$A^2 + \lambda u^2 - \alpha u^4/2 = -\alpha(u^2 - z_1)(u^2 - z_2)/2. \tag{6}$$

Из (6) следует, что левая часть этого равенства неотрицательна, поэтому, с учетом неравенства $z_2 < 0$, имеем $u^2 - z_1 \leq 0$, откуда находим, что $|u| \leq z_1$.

Пусть $x_i \in (0, h)$, $i = 1, \ldots, N$ - точки экстремума функции $u(x)$. В силу дифференцируемости функции $u(x)$ необходимо, чтобы $u'(x_i) = 0$. Из (6) очевидно, что точки 0 и h не являются точками экстремума. Из (6) и (6) ясно, что экстремумы функции $u(x)$ имеют место в точках x_i таких, что $|u(x_i)| = z_1$. Причем, с учетом условия (5), в точках x_{2j+1} - максимумы, а в точках x_{2j} – минимумы, то есть $u(x_{2j+1}) = \sqrt{z_1}$, $u(x_{2j}) = -\sqrt{z_1}$. Из (6) также следует, что если $u(x) = 0$, то $u'(x) \neq 0$. Знание интервалов возрастания и убывания функции $u(x)$ позволяет определить знак в формуле (3).

Теперь проинтегрируем уравнение (3) на интервалах с учетом выбора знака. Обозначим

$$w := \frac{1}{\sqrt{A^2 + \lambda u^2 - \alpha u^4/2}} (> 0).$$

Как показано в [2] в результате получим интегральное дисперсионное уравнение:

$$NT(\lambda) = h(N \geq 1), \tag{7}$$

где

$$T = T(\lambda) := \int_{-\sqrt{z_1}}^{\sqrt{z_1}} w du. \tag{8}$$

Заметим, что в силу (6), несобственный интеграл (8) (как и все несобственные интегралы выше) является абсолютно сходящимся.

Дисперсионные уравнения (4) должны решаться для всех $N \geq 1$, то есть мы имеем множество дисперсионных уравнений, каждое из которых определяет нелинейные собственные значения задачи (1) – (5).

В [2] доказана

Теорема 1. *Если* $\lambda = \lambda_0$ *является собственным значением задачи (1)-(5), то оно является решением дисперсионного уравнения (4) при некотором* $N \geq 1$. *Обратно, если* λ_0 *является решением дисперсионного уравнения (4) при некотором* $N \geq 1$, *то оно является собственным значением задачи (1)-(5).*

2. Анализ интегрального дисперсионного уравнения.

Очевидно, что функция $T(\lambda)$ является положительной и непрерывной при $\lambda \in (-\infty, +\infty)$. Можно показать, что существует

$$H = \max_{\lambda \in (-\infty, +\infty)} T(\lambda).$$

Тогда если $h/N < H$, то существует по крайней мере два решения уравнения (4). Верна [2]

Теорема 2. *Существует* $N^*(\geq 1)$ *такое, что при любом* $N \geq N^*$ *уравнение (4) имеет по крайней мере два решения, причем решения при разных* N *различны. Существует бесконечно много решений* $\lambda_N^{(+)}$ *уравнения (4) таких, что* $\lambda_N^{(+)} > 0$ *и* $\lambda_N^{(+)} \to +\infty$ *при* $N \to \infty$. *Также существует бесконечно много решений* $\lambda_N^{(-)}$ *уравнения (4) таких, что* $\lambda_N^{(-)} < 0$ *и* $\lambda_N^{(-)} \to -\infty$ *при* $N \to \infty$.

3. Нелинейная краевая задача для дифференциального оператора.

Рассмотрим следующую нелинейную краевую задачу на собственные значения для более сложного дифференциального оператора 2-го

порядка:
$$(u')^m u'' - \lambda u + \alpha u^3 = 0, x \in (0,h)(m \geq 0) \tag{9}$$
с однородными краевыми условиями
$$u(0) = u(h) = 0, \tag{10}$$
и дополнительным условием
$$u'(0) = A, A > 0. \tag{11}$$

Будем искать гладкие вещественнозначные решения $u = u(x)$, $u \in C^2(0,h) \cap C^1[0,h]$. Коэффициент нелинейности $\alpha > 0$.

Задача на собственные значения состоит в нахождении таких $\lambda \in \mathbf{R}$, при которых (9) – (11) имеет нетривиальное решение из указанного выше класса функций. Анализ этой задачи аналогичен выполненному выше.

Обозначим $A_0 := \sqrt[m+2]{\frac{m+2}{2}}$, $A_m^2 := \frac{2}{m+2} A^{m+2}$.

Рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного m. Можно показать [2], что при нечетном m задача (9)-(11) не имеет решений.

Случай четного m аналогичен рассмотренному выше случаю $m = 0$. Обозначим
$$w_m := A_0{}^{-1} \left(A_m^2 + \lambda u^2 - \frac{\alpha}{2} u^4 \right)^{-\frac{1}{m+2}}.$$
Применение описанного выше метода приводит к интегральным дисперсионным уравнениям
$$NT_m(\lambda) = h(N \geq 1), \tag{12}$$
где
$$T_m = T_m(\lambda) := \int_{-\sqrt{z_{1,m}}}^{\sqrt{z_{1,m}}} w_m du. \tag{13}$$
Заметим, что несобственный интеграл (13) (как и все несобственные интегралы выше) является абсолютно сходящимся. Верна [2]

Теорема 3. *Если $\lambda = \lambda_0$ является собственным значением задачи (9)-(11), то оно является решением дисперсионного уравнения (12) при некотором $N \geq 1$. Обратно, если λ_0 является решением дисперсионного уравнения (12) при некотором $N \geq 1$, то оно является собственным значением задачи (9)-(11).*

Очевидно, что функция $T_m(\lambda)$ является положительной и непрерывной при $\lambda \in (-\infty, +\infty)$. Верна [2]

Теорема 4. *Пусть $m \geq 2$ четно. При $m = 2$, если выполняется условие $p_0 > h/N$, уравнение (12) имеет по крайней одно решение, причем решения при разных N различны. При $m > 2$, уравнение (12) имеет по крайней одно решение, причем решения при разных N различны. Кроме того, при $m \geq 2$ существует бесконечно много решений $\lambda_N^{(-)}$ уравнения (12) таких, что $\lambda_N^{(-)} < 0$ и $\lambda_N^{(-)} \to -\infty$ при $N \to \infty$.*

Работа поддержана грантом Российского научного фонда N 20-11-20087.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Смирнов Ю.Г.* Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза, Информационно-издательский центр ПензГУ, 2009.

2. *Смирнов Ю.Г.* Метод интегральных дисперсионных уравнений для решения нелинейных задач на собственные значения // Дифференциальные уравнения. 2020. 56. № 10. С. 1331–1338.

УДК 517.968

НОВЫЕ СЛУЧАИ РАЗРЕШИМОСТИ В КВАДРАТУРАХ ОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Созонтова Е.А.

Елабужский институт КФУ, г. Елабуга, Россия;

sozontova-elena@rambler.ru

Для системы уравнений с частными интегралами с тремя независимыми переменными получены новые условия, при которых рассматриваемая система разрешима в квадратурах.

Ключевые слова: система с частными интегралами, разрешимость в квадратурах.

NEW CASES OF SOLVABILITY IN QUADRATURES OF ONE SYSTEM OF EQUATIONS WITH PARTIAL INTEGRALS

Sozontova E.A.
Elabuga Institute of KFU, Elabuga, Russia;
sozontova-elena@rambler.ru

For a system of equations with partial integrals with three independent variables, new conditions are obtained under which the system under consideration is solvable in quadratures.

Key words: system with partial integrals, solvability in quadratures.

В области $G=\{x_0<x<x_1,\ y_0<y<y_1,\ z_0<z<z_1\}$ рассматривается система

$$\begin{gathered}\varphi_i(x,y,z)=a_{i1}(x,y,z)\int\limits_{x_0}^{x}[b_{11}(t,y,z)\varphi_1(t,y,z)+\\ +b_{12}(t,y,z)\varphi_2(t,y,z)+b_{13}(t,y,z)\varphi_3(t,y,z)]dt+\\ +a_{i2}(x,y,z)\int\limits_{y_0}^{y}[b_{21}(x,\tau,z)\varphi_1(x,\tau,z)+b_{22}(x,\tau,z)\varphi_2(x,\tau,z)+\\ +b_{23}(x,\tau,z)\varphi_3(x,\tau,z)]d\tau+a_{i3}(x,y,z)\int\limits_{z_0}^{z}[b_{31}(x,y,\theta)\varphi_1(x,y,\theta)+\\ +b_{32}(x,y,\theta)\varphi_2(x,y,\theta)+b_{33}(x,y,\theta)\varphi_3(x,y,\theta)]d\theta+f_i(x,y,z),\\ i=\overline{1,3}.\end{gathered}\tag{1}$$

Будем считать, что коэффициенты системы (1) непрерывны в замыкании области G и имеет место условие

$$\Delta(x,y,z)=\det\|a_{ik}(x,y,z)\|\neq 0.\tag{2}$$

Кроме того, потребуем также выполнения следующего условия:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32} & a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}\\ a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33} & a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31} & a_{21}a_{13}-a_{23}a_{11}\\ a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22} & a_{12}a_{31}-a_{32}a_{11} & a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\end{vmatrix}\neq 0.\tag{3}$$

Целью исследования является выделение случаев разрешимости системы (1) в квадратурах (некоторые случаи разрешимости этой системы в явном виде были изложены в работах [1], [2]). На основании результатов работы [3] получены новые случаи разрешимости рассматриваемой системы в квадратурах.

Введем обозначения:

$$\begin{gathered}
\alpha_1 = -((\ln\Delta)_x + (b_{11}A_1 + b_{12}A_2 + b_{13}A_3)\tfrac{\Delta}{\Delta_1}),\\
\beta_1 = -(b_{11}B_1 + b_{12}B_2 + b_{13}B_3)\tfrac{\Delta}{\Delta_1},\\
\gamma_1 = -(b_{11}C_1 + b_{12}C_2 + b_{13}C_3)\tfrac{\Delta}{\Delta_1},\\
\alpha_2 = -(b_{21}A_1 + b_{22}A_2 + b_{23}A_3)\tfrac{\Delta}{\Delta_1},\\
\beta_2 = -((\ln\Delta)_y + (b_{21}B_1 + b_{22}B_2 + b_{23}B_3)\tfrac{\Delta}{\Delta_1}),\\
\gamma_2 = -(b_{21}C_1 + b_{22}C_2 + b_{23}C_3)\tfrac{\Delta}{\Delta_1},\\
\alpha_3 = -(b_{31}A_1 + b_{32}A_2 + b_{33}A_3)\tfrac{\Delta}{\Delta_1},\\
\beta_3 = -(b_{31}B_1 + b_{32}B_2 + b_{33}B_3)\tfrac{\Delta}{\Delta_1},\\
\gamma_3 = -((\ln\Delta)_z + (b_{31}C_1 + b_{32}C_2 + b_{33}C_3)\tfrac{\Delta}{\Delta_1}),
\end{gathered} \tag{4}$$

где A_i, B_i, C_i выражаются через коэффициенты системы (1) (см.[1]). Важную роль при получении условий разрешимости системы (1) в квадратурах играют конструкции

$$\begin{gathered}
h_1 = a_x + ab - e,\ h_2 = a_y + ac - d,\ h_3 = b_y + bc - f,\\
h_4 = b_z + ab - e,\ h_5 = c_x + bc - f,\ h_6 = c_z + ac - d,\\
h_7 = d_x + bd - g,\ h_8 = e_y + ce - g,\ h_9 = f_z + af - g
\end{gathered}$$

и условия

$$\begin{gathered}
1)\ h_3 \equiv h_4 \equiv h_6 \equiv h_9 \equiv 0;\ 2)\ h_4 \equiv h_5 \equiv h_6 \equiv h_9 \equiv 0;\\
3)\ h_1 \equiv h_2 \equiv h_3 \equiv h_8 \equiv 0;\ 4)\ h_2 \equiv h_3 \equiv h_4 \equiv h_8 \equiv 0;\\
5)\ h_1 \equiv h_2 \equiv h_5 \equiv h_7 \equiv 0;\ 6)\ h_1 \equiv h_5 \equiv h_6 \equiv h_7 \equiv 0;\\
7)\ b_y \equiv c_x,\ b_z \equiv a_x,\ c_z \equiv a_y,\ h_1 \equiv h_2 \equiv h_5 \equiv 0,\\
h_7 = \varphi(x)\psi(y)\theta(z).
\end{gathered} \tag{5}$$

$$\gamma_1 \equiv \alpha_2 \equiv \beta_3 \equiv 0, \tag{6}$$

$$\beta_1\gamma_2 \neq 0, \tag{7}$$

$$\begin{gathered}
b \equiv e \equiv f \equiv 0,\\
a = -(\ln(\beta_1\gamma_2))_z - (\alpha_1 x - \gamma_3 z)_z,\\
c = -(\ln\beta_1)_y - (\alpha_1 x - \beta_2 y)_y,\\
d = -(\ln\beta_1)_{yz} - (\alpha_1 x - \beta_2 y)_{yz} +\\
+((\ln\beta_1)_y + (\alpha_1 x - \beta_2 y)_y)[(\ln(\beta_1\gamma_2))_z + (\alpha_1 x - \gamma_3 z)_z],\\
g = \alpha_3\beta_1\gamma_2,
\end{gathered} \tag{8}$$

$$\alpha_3\gamma_2 \neq 0, \tag{9}$$

$$
\begin{gathered}
c \equiv d \equiv f \equiv 0, \\
a = -(\ln \gamma_2)_z - (\beta_2 y - \gamma_3 z)_z, \\
b = -(\ln(\alpha_3 \gamma_2))_x - (\beta_2 y - \alpha_1 x)_x, \\
e = -(\ln \gamma_2)_{xz} - (\beta_2 y - \gamma_3 z)_{xz} + \\
+((\ln \gamma_2)_z + (\beta_2 y - \gamma_3 z)_z)[(\ln(\alpha_3 \gamma_2))_x + (\beta_2 y - \alpha_1 x)_x], \\
g = \alpha_3 \beta_1 \gamma_2,
\end{gathered}
\tag{10}
$$

$$
\alpha_3 \beta_1 \neq 0, \tag{11}
$$

$$
\begin{gathered}
a \equiv d \equiv e \equiv 0, \\
b = -(\ln \alpha_3)_x - (\gamma_3 z - \alpha_1 x)_x, \\
c = -(\ln(\alpha_3 \beta_1))_y - (\gamma_3 z - \beta_2 y)_y, \\
f = -(\ln \alpha_3)_{xy} - (\gamma_3 z - \alpha_1 x)_{xy} + \\
+((\ln \alpha_3)_x + (\gamma_3 z - \alpha_1 x)_x)[(\ln(\alpha_3 \beta_1))_y + (\gamma_3 z - \beta_2 y)_y], \\
g = \alpha_3 \beta_1 \gamma_2.
\end{gathered}
\tag{12}
$$

Тогда справедлива теорема

Теорема 1. *Для разрешимости системы (1) в квадратурах достаточно, чтобы выполнялись неравенства (2), (3), тождества (6) и один из трех наборов* a, b, c, d, e, f, g*, определяемых формулами (7) – (8), (9) – (10), (11) – (12), удовлетворял одному из условий 1) – 7) в (5).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Созонтова Е.А.* Об условиях разрешимости трехмерной системы интегральных уравнений в квадратурах // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2015. № 10 (132). С. 40–46.

2. *Созонтова Е.А.* К новым случаям разрешимости в квадратурах трехмерной системы уравнений с частными интегралами // Материалы LXXIV научной конференции "Герценовские чтения - 2021". С. 89–91.

3. *Созонтова Е.А.* К условиям разрешимости задачи Гурса в квадратурах для трехмерной системы первого порядка // Вестник Воронежского гос. ун-та. Серия: Физика. Математика. 2017. № 2. С. 128–138.

УДК 517.95

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С НОРМАЛЬНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Солдатов А.П.
ФИЦ "Информатика и управление"РАН, г. Москва, Россия;
soldatov48@gmail.com

Для эллиптического уравнения высокого порядка в многосвязной области на плоскости рассматривается обобщенная задача Неймана, которая определяется заданием на ее границе соответствующего числа нормальных производных различных. Установлен критерий фредгольмовости этой задачи и приведена формула ее индекса.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение высокого порядка, многосвязная область, обобщенная задача Неймана, критерий фредгольмовости, индекс.

BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH NORMAL DERIVATIVES FOR AN ELLIPTIC EQUATION ON A PLANE

Soldatov A.P.
FRC "Informatics and Control"RAS, Moscow, Russia;
soldatov48@gmail.com

For an elliptic equation of a higher order in a multiply connected domain on a plane, the generalized Neumann problem is considered, which is determined by specifying the corresponding number of different normal derivatives on its boundary. A criterion for the Fredholm property of this problem is established and a formula for its index is given.

Key words: higher order elliptic equation, multiply connected domain, generalized Neumann problem, criterion for Fredholm property, index.

УДК 517.956.223

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ТРЕМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ЧЕТВЕРТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Уринов А.К., Каримов К.Т.
Ферганский государственный университет, г. Фергана, Узбекистан;
urinovak@mail.ru, karimovk80@mail.ru

Для трехмерного эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами в цилиндрической области исследована задача Дирихле. Единственность и существования решения задачи Дирихле доказана с использованием метода спектрального анализа.

Ключевые слова: сингулярный коэффициент, эллиптический тип, трехмерное уравнение, полнота.

DIRICHLET PROBLEM FOR A THREE-DIMENSIONAL ELLIPTIC EQUATION WITH THREE SINGULAR COEFFICIENTS IN A QUARTER CYLINDRICAL DOMAIN

Urinov A.K., Karimov K.T.
Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;
urinovak@mail.ru, karimovk80@mail.ru

The Dirichlet problem is investigated for a three-dimensional elliptic equation with three singular coefficients in a cylindrical domain. The uniqueness and existence of a solution to the Dirichlet problem is proved using the method of spectral analysis.

Key words: singular coefficient, elliptic type, three-dimensional equation, completeness.

Рассмотрим уравнение

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} + \frac{2\alpha}{x}U_x + \frac{2\beta}{y}U_y + \frac{2\gamma}{z}U_z = 0, \qquad (1)$$

в области $\Omega = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1,\ x > 0,\ y > 0, z \in (0, c)\right\}$, где $\alpha, \beta, \gamma, c \in R$, причём $0 < \alpha, \beta < 1/2,\ \gamma < 1/2$.

В области Ω для уравнения (1) рассмотрим следующую задачу:

Задача D. Найти функцию $U(x,y,z) \in C\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющая уравнению (1) и краевым условиям

$$U(x,y,z) = F(x,y,z), \quad (x,y,z) \in S_1, \tag{2}$$

$$U(x,0,z) = 0, \quad (x,0,z) \in S_2, \ U(0,y,z) = 0, \quad (0,y,z) \in S_3, \tag{3}$$

$$U(x,y,0) = 0, \quad (x,y,0) \in S_4, \ U(x,y,c) = 0, \ (x,y,c) \in S_5, \tag{4}$$

где

$$S_1 = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0, z \in [0,c]\right\},$$

$$S_2 = \{(x,y,z) : x \in [0,1], y = 0, z \in [0,c]\},$$

$$S_3 = \{(x,y,z) : x = 0, y \in [0,1], z \in [0,c]\}, \ \ S_4 = S_1 \cap \{z = 0\},$$

$S_5 = S_1 \cap \{z = c\}$, $F(x,y,z)-$ заданная функция.

Краевые задачи для различных частных и подобных случаев уравнения (1) были предметом интереса многих математиков. Так, в 1952 году М.Б.Капилевичем [1] была решена задача Дирихле для уравнения $\Delta u + (a/x_n)\, u_{x_n} - b^2 u = 0$, $a < 1$ в полуплоскости $y > 0$.

Краевыми задачами для уравнения с сингулярными коэффициентами в двумерных и многомерных случаях, занимались М.С.Салахитдинов и М.С.Мирсабуров [2], М.С.Салахитдинов и А.К.Уринов [3], М.С.Салахитдинов и Б.Исломов [4], Н.Р.Раджабов [5], К.Б.Сабитов [6], А.А. Абашкин [7] и др.

В цилиндрических координатах, область Ω переходит в $\Delta = \{(\rho,\varphi,z) : \ \rho \in (0,1)\,, \varphi \in (0,\pi/2)\,, 0 < z < c\}$, а уравнение (1) и условия (2)-(4) соответственно принимают вид

$$u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{1+2\alpha+2\beta}{\rho}u_\rho + \frac{2\beta ctg\varphi - 2\alpha tg\varphi}{\rho^2}u_\varphi + u_{zz} + \frac{2\gamma}{z}u_z = 0, \tag{5}$$

$$u(0,\varphi,z) = 0, \quad u(1,\varphi,z) = f(\varphi,z), \ \ \varphi \in [0,\pi/2], \ z \in [0,c], \tag{6}$$

$$u(\rho,0,z) = 0, \ \ u(\rho,\pi/2,z) = 0, \ \ \rho \in [0,1], \ z \in [0,c], \tag{7}$$

$$u(\rho,\varphi,0) = 0, \ \ u(\rho,\varphi,c) = 0, \quad \rho \in [0,1], \ \ \varphi \in [0,\pi/2], \tag{8}$$

где $f(\varphi,z) = F(\cos\varphi, \sin\varphi, z)$.

Представив неизвестную функцию в виде

$$u(\rho,\varphi,z) = R(\rho)\, S(\varphi)\, Z(z).$$

Затем, подставив её в уравнение (5) и в условия (6), (7), (8), мы получим уравнение вида:

$$\rho^2 R''(\rho) + (1 + 2\alpha + 2\beta)\,\rho R'(\rho) + \left(\lambda\rho^2 - \mu\right) R(\rho) = 0, \quad \rho \in (0,1)\,, \tag{9}$$

и задачи на собственные значения:

$$Z''(z) + (2\gamma/z)\, Z'(z) - \lambda Z(z) = 0, \;\; z \in (0,c)\,, \tag{10}$$

$$Z(0) = 0, \;\; Z(c) = 0, \tag{11}$$

$$S''(\varphi) + (2\beta ctg\varphi - 2\alpha tg\varphi)\, S'(\varphi) + \mu\, S(\varphi) = 0, \;\; \varphi \in (0,\pi/2)\,, \tag{12}$$

$$S(0) = 0, \;\; S(\pi) = 0, \tag{13}$$

где $\mu, \lambda \in R-$ константа разделения.

Собственные функции задачи {(12), (13)}, имеют вид

$$S_n(\varphi) = (\sin\varphi)^{1-2\beta} \times$$

$$\times F\left(\frac{1+\alpha-\beta+\omega_n}{2}, \frac{1+\alpha-\beta-\omega_n}{2}; \frac{3}{2}-\beta; \sin^2\varphi\right), \;\; n \in N,$$

где $\mu_n = (\omega_n)^2 - (\alpha+\beta)^2\,, \;\; \omega_n = 2n - (\alpha+\beta)\,, \;\; n \in N.$

Дальнейшее исследование задачи, в общем случае, представляет значительные трудности, поэтому рассмотрим случай $\alpha = \beta,$ тогда собственные функции задачи {(12),(13)} определяются формулами

$$S_n(\varphi) = (\sin\varphi)^{1/2-\beta}\, \mathrm{P}^{\beta-1/2}_{(\omega_n-1)/2}(\cos\varphi)\,, \;\; n \in N. \tag{14}$$

Известно [8], что при $\beta \in (0, 1/2)\,,$ система собственных функций (14) полна в пространстве $L_2(0,\pi)\,.$

Собственные функции задачи {(10), (11)}, имеют вид

$$Z_m(z) = \frac{\sqrt{2}}{\left|cJ_{3/2-\gamma}(\sigma_m)\right|} z^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(\sigma_m z/c)\,, \;\; m \in N, \tag{15}$$

где $\sigma_m -$ положительные нули функции $J_{1/2-\gamma}(x)\,,$ $\lambda_m = -(\sigma_m/c)^2\,.$

Согласно работе [9], система собственных функций (15) ортонормальна и полна в пространстве $L_2(0,c)$ с весом $z^{2\gamma}$.

Полагая в уравнении (9) $\lambda_m = -(\sigma_m/c)^2$, найдём общее решение этого уравнения при $\alpha = \beta$, в виде

$$R(\rho) = c_{1nm}\rho^{-2\beta} I_{\omega_n}(\sigma_m \rho/c) + c_{2nm}\rho^{-2\beta} K_{\omega_n}(\sigma_m \rho/c), \quad \rho \in [0,1], \tag{16}$$

здесь c_{1nm} и $c_{2nm}-$ произвольные постоянные.

Из первого условия (6), вытекает $R(0) = 0$. Из (16) следует, что решение уравнения (9), удовлетворяющее условию $R(0) = 0$, существует при $\omega_n > 2\beta$ и оно определяется равенством

$$R_{nm}(\rho) = c_{1nm}\rho^{-2\beta} I_{\omega_n}(\sigma_m \rho/c). \tag{17}$$

Можно доказать, что функция

$$\vartheta_{nm}(\rho) = \int_0^c \int_0^{\pi/2} u(\rho, \varphi, z)(\sin\varphi)^{2\beta} S_n(\varphi) z^{2\gamma} Z_m(z)\, d\varphi dz, \quad n, m \in N,$$

удовлетворяет уравнению (9), где функции $S_n(\varphi)$ и $Z_m(z)$ определяются формулами (14) и (15). Следовательно $\vartheta_{nm}(\rho) = R_{nm}(\rho)$.

Теперь, учитывая второе условие (6), находим $\vartheta_{nm}(1)$:

$$\vartheta_{nm}(1) = \int_0^c \int_0^{\pi/2} f(\varphi, z)(\sin\varphi)^{2\beta} S_n(\varphi) z^{2\gamma} Z_m(z)\, d\varphi dz = f_{nm}. \tag{18}$$

Принимая во внимание $\vartheta_{nm}(\rho) = R_{nm}(\rho)$ и подставляя (17) в (18), после некоторых вычислений, однозначно находим коэффициент c_{1nm} : $c_{1nm} = f_{nm}/I_{\omega_n}(\sigma_m/c)$. Подставляя это в (17), находим

$$R_{nm}(\rho) = \rho^{-2\beta} I_{\omega_n}(\sigma_m \rho/c)\, f_{nm}/I_{\omega_n}(\sigma_m/c). \tag{19}$$

Единственность решения задачи D следует из полноты системы собственных функций (15) в пространстве $L_2(0,c)$ с весом $z^{2\gamma}$ и системы собственных функций (14) в пространстве $L_2(0,\pi)$.

На основании функций (14), (15), (19) единственное решение задачи D строятся в виде ряда Фурье-Бесселя:

$$u(\rho, \varphi, z) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(\sigma_m z/c)}{c^2 J^2_{3/2-\gamma}(\sigma_m)} \frac{\rho^{-2\beta} I_{\omega_n}(\sigma_m \rho/c)}{I_{\omega_n}(\sigma_m/c)} S_n(\varphi)\, \tilde{f}_{nm},$$

где $\tilde{f}_{nm} = \int\limits_0^c \int\limits_0^{\pi/2} f(\varphi, z)(\sin\varphi)^{2\beta} S_n(\varphi) z^{1/2+\gamma} J_{1/2-\gamma}(\sigma_m z/c)\, d\varphi dz.$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Капилевич М.Б.*Об одном уравнении смешанного эллиптико-гиперболического типа // Математический сборник. 1952. № 1. С. 11–38.

2. *Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.* Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент: Universitet, 2005. 224 с.

3. *Салахитдинов М.С., Уринов А.К.* К спектральной теории уравнений смешанного типа. Ташкент: Mumtoz So'z, 2010. 355 с.

4. *Салахитдинов М.С., Исломов Б.* Уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. –Ташкент: Mumtoz So'z, 2010. 372 с.

5. *Раджабов Н.*Теоремы единственности решений задач и типов Дирихле и Неймана для общего сингулярного уравнения второго порядка эллиптического типа // Докл. АН СССР. 1979. Т. 246. № 1. С. 14–19.

6. *Сабитов К.Б.* К теории уравнений смешанного типа. М.: Физматлит, 2014. 304 с.

7. *Абашкин А.А., Егорова И.П.* Задача Дирихле в параллелепипеде для эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами // Изв. вузов. Матем. 2019. № 10. С. 3–14.

8. *Мамедов Я.Н.*О некоторых задачах на собственные значения для уравнения смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. № 1. С. 163–167.

9. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. М.: Т.1.Изд. ИЛ., 1949. 798 с.

УДК 517.95

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ С НЕОДНОРОДНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Фадеева О.В.
Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия;
faoks@yandex.ru

Изучена начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольно закрепленной балки. На основании решения краевой задачи при отсутствии внешней силы и однородных граничных условиях, рассмотрен общий случай при наличии внешней силы и неоднородных граничных условий. Решение задачи построено в виде суммы ряда Фурье. Установлены достаточные условия на начальные функции, выполнение которых обеспечивает равномерную сходимость построенного ряда в классе регулярных решений уравнения. Опираясь на полученное решение , установлена его устойчивость в зависимости от начальных данных.

Ключевые слова: уравнение балки, аналитическое решение, единственность, существование.

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE EQUATION OF BEAM OSCILLATION WITH INHOMOGENEOUS BOUNDARY CONDITIONS

Fadeeva O.V.
Samara State Technical University, Samara, Russia;
faoks@yandex.ru

The initial boundary value problem for the equation of forced vibrations of a cantilevered beam is studied. Based on the solution of the boundary value problem in the absence of an external force and homogeneous boundary conditions, the general case is considered in the presence of an external force and inhomogeneous boundary conditions. The solution of the problem is constructed as a sum of a Fourier series. Sufficient conditions are established for the initial functions, the *fulfillment of which ensures uniform convergence of the constructed series in the class of regular solutions of the equation. Based on the obtained solution, its stability is established depending on the initial data.*

Key words: beam equation, analytical solution, uniqueness, existence.

Рассмотрим однородную консольно-закрепленную балку длины l. Ее вынужденные изгибные поперечные колебания под действием непрерывной внешней силы можно описать уравнением

$$u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} = F(x,t). \tag{1}$$

Ранее [1] была рассмотрена начально-граничная задача для уравнения (1) в области $D = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$, с однородными граничными условиями.

В данной работе рассмотрена задача с неоднородными граничными условиями для случая, когда внешняя сила отлична от нуля : найти в области D решение $u(x,t)$ уравнения (1), обладающее свойствами:

$$u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(D) \cap C^{2,1}_{x,t}(\overline{D}), \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{3}$$

$$\begin{gathered} u(0,t) = h_1(t), \quad u_x(0,t) = h_2(t), \\ u_{xx}(l,t) = g_1(t), \quad u_{xxx}(l,t) = g_2(t), \quad 0 \le t \le T, \end{gathered} \tag{4}$$

где $h_1(t), h_2(t), g_1(t), g_2(t)$ – заданные достаточно гладкие функции, подчиненные условиям согласования с начальными функциями (3):

$$\begin{gathered} h_1(0) = \varphi(0), \quad h_1'(0) = \psi(0), \quad h_2(0) = \varphi'(0), \quad h_2'(0) = \psi'(0), \\ g_1(0) = \varphi''(l), \quad g_1'(0) = \psi''(l), \quad g_2(0) = \varphi'''(l), \quad g_2'(0) = \psi'''(l). \end{gathered} \tag{5}$$

Показано, что поставленную неоднородную задачу можно свести к решению начально-граничной задачи для неоднородного уравнения колебаний балки с однородными начальными и граничными условиями и новой правой частью. Для этого рассматривают вспомогательные функции:

$$v(x,t) = u(x,t) - z(x,t) - w(x,t), \tag{6}$$

где

$$z(x,t) = h_1(t) + x h_2(t) + \frac{x^2}{2} g_1(t) + \left(\frac{x^4}{24l} - \frac{lx^2}{4} \right) g_2(t), \tag{7}$$

$$
\begin{aligned}
w(x,t) = \varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \tfrac{x^2}{2}\varphi''(l) - \left(\tfrac{x^4}{24l} - \tfrac{lx^2}{4}\right)\varphi'''(l) + \\
+t\left(\psi(x) - \psi(0) - x\psi'(0) - \tfrac{x^2}{2}\psi''(l) - \left(\tfrac{x^4}{24l} - \tfrac{lx^2}{4}\right)\psi'''(l)\right).
\end{aligned} \tag{8}
$$

Доказана справедливость следующего утверждения.

Теорема. *Если выполняются условия* $F(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C_x^4(\overline{D})$,

$$h_1(t), h_2(t), g_1(t), g_2(t) \in C^2[0,T], \quad \varphi(x), \psi(x) \in C^7[0,l],$$

и при любом $t \in [0,T]$

$$
\begin{aligned}
F(0,t) + h_1''(t) + \tfrac{\alpha^2}{l}\left(g_2(t) + l\varphi^{IV}(0) + t\psi^{IV}(0) - g_2(0) - tg_2'(0)\right) = \\
= F_x(0,t) + h_2''(t) + \tfrac{\alpha^2}{l}\left(l\varphi^{V}(0) + t\psi^{V}(0)\right) = \\
= F_{xx}(l,t) + g_1''(t) + \tfrac{\alpha^2}{l}\left(l\varphi^{VI}(l) + t\psi^{VI}(l)\right) = \\
= F_{xxx}(l,t) + g_2''(t) + \tfrac{\alpha^2}{l}\left(l\varphi^{VII}(l) + t\psi^{VII}(l)\right) = 0,
\end{aligned}
$$

то существует единственное устойчивое решение поставленной начально-граничной задачи, определяемое по формуле

$$u(x,t) = v(x,t) + z(x,t) + w(x,t),$$

где функция $v(x,t)$ *определяется рядом*

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) Y_n(x). \tag{9}$$

Здесь

$$T_n(t) = \frac{1}{\alpha d_n^2}\int_0^l \tilde{F}_n(s) sin\left[\alpha d_n^2(t-s)\right] ds; \tag{10}$$

$Y_n(x)$ – собственные функции однородной задачи для уравнения (1):

$$Y_n(x) = \frac{X_n(x)}{\|X_n(x)\|}, \|X_n(x)\| = \begin{cases} \sqrt{l}\,\mathrm{cth}(d_n l/2), & n = 2k-1, \\ \sqrt{l}\,\mathrm{th}(d_n l/2), & n = 2k. \end{cases} \tag{11}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сабитов К.Б., Фадеева О.В.* Колебания балки консольной балки // Прикладная математика и Физика. 2021. № 53(1). С. 5–12.

УДК 517.95

ПОТЕНЦИАЛЫ СОПРЯЖЁННЫХ ПАР И ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ, ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ГУРСА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Федоров Ю.И.
Оренбургский государственный аграрный университет,
г. Оренбург, Россия;
yurf0023@mail.ru

В статье исследуется класс линейных гиперболических уравнений второго порядка с двумя переменными в дивергентной форме. Используется метод, разработанный автором и основанный на применении полных дифференциалов и введённого автором понятия потенциала сопряжённых пар решений исходного и сопряжённого уравнений. Выведена теорема о среднем и простые формулы общего решения и решения задачи Гурса.

Ключевые слова: линейные гиперболические уравнения второго порядка, полные дифференциалы, теорема о среднем, общее решение, задача Гурса.

THE POTENTIALS OF CONJUGATE PAIRS AND THE MEAN THEOREM, THE GENERAL SOLUTION AND THE SOLUTION OF THE GOURSAT PROBLEM FOR A CLASS OF HYPERBOLIC EQUATIONS

Fedorov Yu.I.
Orenburg State Agrarian University, Orenburg, Russia;
yurf0023@mail.ru

The article investigates a class of second-order linear hyperbolic equations with two variables in a divergent form. The method developed by the author and based on the application of complete differentials and the concept of the potential of conjugate pairs of solutions of the original and conjugate equations introduced by the author is used. The mean theorem and simple formulas for the general solution and solution of the Goursat problem are derived.

Key words: linear hyperbolic equations of the second order, complete differentials, the mean theorem, the general solution, the Goursat problem.

В ряде работ, например [5 – 7], [9] исследовались решения линейных дифференциальных гиперболических уравнений с частными производными второго порядка методом, разработанным автором, основу которого составляет введённый и построенный автором так называемый (автором) потенциал сопряжённой пары решений исходного и сопряжённого уравнений.

Исследования дифференциальных уравнений рассматриваемым методом и его развитие проводились в нескольких направлениях. В работах [5, 6] рассмотрены аналитические интегральные представления и продолжения решений гиперболических уравнений по параметрам с помощью потенциалов сопряжённых пар. В работах [6, 7] предложен метод представления решений уравнений с частными производными, в том числе более высоких порядков, суммами потенциалов сопряжённых пар гиперболических уравнений. В [8, 9] восстанавливались решения гиперболических уравнений и обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с помощью представлений суммами решений уравнений первого порядка. Другим направлением является изучение прикладного значения потенциалов сопряжённых пар в математических моделях, которые описываются задачами для линейных гиперболических уравнений. В работе [5] изучались прикладные аспекты потенциалов сопряжённых пар в моделях динамики сорбции газов.

Предложенный метод является неклассическим аналитическим методом. Неклассические задачи и методы особенно широко применяются в современных исследованиях [2 – 4]. Введённые в рассмотрение потенциалы сопряжённых пар позволяют выявить новые свойства, представления и задачи решений дифференциальных уравнений. Поэтому, данная тема является актуальной как в математических и прикладных исследованиях, так и в учебных целях при освоении метода на простых модельных уравнениях.

Понятие потенциала сопряжённых пар для линейного дифференциального уравнения с частными производными носит общий характер, который определяется применением дифференциальных тождеств (назовём их тождествами Грина) [2] и понятия полного дифференциала [1]. Но построение потенциалов для уравнений различных классов имеют важные для исследования этих уравнений особенности. В данной работе с помощью рассматриваемого метода для линейных гиперболических уравнений второго порядка с двумя переменными в дивергентной форме выведена теорема о среднем, формулы общего решения и решения задачи Гурса.

В области $D=\{(x,y):x\geq 0,y\geq 0\}$ плоскости XOY рассматривается линейное дифференциальное гиперболическое уравнение с частными производными второго порядка вида

$$B(u)\equiv(\alpha(x,y)u_x)_y+(\beta(x,y)u_y)_x=0, \tag{1}$$

$$\alpha(x,y),\ \beta(x,y)\in C^1(\bar{D}), u(x,y)\in C^1(\overline{D})\cap C^2(D). \tag{2}$$

Введём и построим потенциал $u^*(x,y)$ сопряжённой пары $u(x,y)$ и $v(x,y)$ решений исходного (1) и сопряжённого уравнений соответственно.

Предварительно приведём Грина для оператора $B(u)$ в (1), т. к. в основе потенциала сопряжённых пар, в свою очередь, лежит понятие полного дифференциала функции двух переменных, который в рассматриваемых задачах удаётся найти благодаря применению тождества Грина. Если $B^*(v)=(\beta v_x)_y+(\alpha v_y)_x$ сопряжённый оператор, то в области D тождество Грина для оператора $B(u)$, где $u(x,y)$ и $v(x,y)$ любыми функциями класса (2), имеет вид

$$vB(u)-uB^*(v)=(v\alpha u_x-\beta v_x u)_y-(-v\beta u_y+\alpha v_y u)_x\,. \tag{3}$$

Перейдём теперь непосредственно к построению потенциала сопряжённых пар. Полагая в тождестве (3) $B(u)=0$, $B^*(v)=0$ получим в D дифференциальное тождество $(v\alpha u_x-\beta v_x u)_y=(-v\beta u_y+\alpha v_y u)_x$, откуда следует, что для $(v\alpha u_x-\beta v_x u)\,dx+(-v\beta u_y+\alpha v_y u)\,dy$ выполнены все условия известного признака полного дифференциала в односвязной области D [1]. Поэтому в области D определена функция $u^*(x,y)$ такая, что

$$du^*=(v\alpha u_x-\beta v_x u)\,dx+(-v\beta u_y+\alpha v_y u)\,dy. \tag{4}$$

Функцию $u^*(x,y)$ назовём потенциалом сопряжённой пары $u(x,y)$, $v(x,y)$ в D.

Дифференциальное равенство (4), определящее $u^*(x,y)$, можно записать в виде системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} u^*_x=v\alpha u_x-\beta v_x u,\\ u^*_y=-v\beta u_y+\alpha v_y u. \end{cases} \tag{5}$$

Одним из решений сопряжённого уравнения $B^*(v) = 0$ будет функция $v(x,y) = 1$. Если в (5) $v(x,y) = 1$, то система, определяющая потенциал $u^*(x,y)$ пары $u(x,y)$ и $v(x,y) = 1$, будет проще

$$\begin{cases} u^*_x = \alpha u_x, \\ u^*_y = -\beta u_y. \end{cases} \tag{6}$$

Потенциал $u^*(x,y)$ восстанавливается по своему полному дифференциалу по формуле

$$u^*(x,y) = u^*(0,0) + \int_{O(0,0)}^{M(x,y)} \alpha(\eta) u_\xi(\xi,\eta) d\xi - \beta(\xi) u_\eta(\xi,\eta) d\eta, \tag{7}$$

где $OM \subset D$ – кусочно-гладкая линия интегрирования, $(\xi,\eta) \in OM$ – переменные интегрирования, а криволинейный интеграл 2 типа не зависит от формы дуги интегрирования [1].

В данной статье рассмотрен самый простой вариант системы уравнений (6), когда коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют, кроме условий (2), дополнительным условиям

$$\alpha(x,y) = \alpha(y), \beta(x,y) = \beta(x). \tag{8}$$

В этом случае система уравнений (6) приводится к виду

$$\begin{cases} (u^* - \alpha u)_x = 0, \\ (u^* + \beta u)_y = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Из (9) следует, что функция $u^*(x,y) - \alpha(y)u(x,y)$ зависит только от y и не зависит от x; она постоянна вдоль каждой характеристики $y = const$. Функция $u^*(x,y) + \beta(x)u(x,y)$ зависит только от x и не зависит от y, она постоянна вдоль каждой характеристики $x = const$. Поэтому, интегрируя уравнения системы (9) приводим её к простейшей алгебраической системе уравнений относительно $u^*(x,y)$ и $u(x,y)$, из которой выводятся основные результаты работы.

1. Общее решение. Если проинтегрированную систему уравнений записать в виде

$$\begin{cases} u^*(x,y) - \alpha(y)u(x,y) = \varphi(y), \\ u^*(x,y) + \beta(x)u(x,y) = \psi(x), \end{cases} \tag{10}$$

где $\varphi(y)$ и $\psi(x)$ произвольные непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов, $\alpha(y) + \beta(x) \neq 0$, то из (10) найдём общее решение системы дифференциальных уравнений (6)

$$\begin{cases} u^*(x,y) = (\alpha(y)\psi(x) + \beta(x)\varphi(y))\,/\,(\alpha(y)+\beta(x)), \\ u(x,y) = (\psi(x) - \varphi(y)\,/\,(\alpha(y)+\beta(x)), \end{cases} \tag{11}$$

в котором вторая формула определяет общее решение $u(x,y)$ исходного гиперболического уравнения (1).

2. Теорема о среднем для уравнения (1). Если систему уравнений, полученную интегрированием системы уравнений (9), представить в виде

$$\begin{cases} u^*(x,y) - \alpha(y)u(x,y) = u^*(0,y) - \alpha(y)u(0,y), \\ u^*(x,y) + \beta(x)u(x,y) = u^*(x,0) + \beta(x)u(x,0), \end{cases} \tag{12}$$

то из (12) найдём соотношения, называемые теоремами о среднем [2] для решений $u^*(x,y)$ и $u(x,y)$ системы (6) дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} (\alpha(y)+\beta(x))\,u^*(x,y) = \\ = \alpha(y)u^*(x,0) + \alpha(y)\beta(x)u(x,0) + \beta(x)u^*(0,y) - \alpha(y)\beta(x)u(0,y), \\ (\alpha(y)+\beta(x))\,u(x,y) = \\ = u^*(x,0) + \beta(x)u(x,0) - u^*(0,y) + \alpha(y)u(0,y), \end{cases} \tag{13}$$

где $u^*(x,0)$ и $u^*(0,y)$ определяются формулой (7). Вычислив $u^*(x,0)$ и $u^*(0,y)$ по формуле (7),

$$u^*(x,0) = u^*(0,0) + \alpha(0)u(x,0) - \alpha(0)u(0,0),$$

$$u^*(0,y) = u^*(0,0) - \beta(0)u(0,y) + \beta(0)u(0,0)$$

и подставив в (13), получим теорему о среднем для решения $u(x,y)$ уравнения (1) в области D: если $\alpha(y)$ и $\beta(x)$ удовлетворяют условиям (2), (8), $\alpha(y)+\beta(x) \neq 0$, $u(x,y)$ класса гладкости (2), то значения решения в вершинах характеристического четырёхугольника $u(x,y)$, $u(x,0)$, $u(0,y)$, $u(0,0)$, удовлетворяют тождеству

$$u(x,y) + \frac{\alpha(0)+\beta(0)}{\alpha(y)+\beta(x)}u(0,0) = \frac{\alpha(0)+\beta(x)}{\alpha(y)+\beta(x)}u(x,0) + \frac{\beta(0)+\alpha(y)}{\alpha(y)+\beta(x)}u(0,y). \tag{14}$$

3. Решение задачи Гурса. Из формулы (14) находим в области D решение $u(x,y)$ **задачи Гурса** для уравнения (1) с заданными граничными значениями $u(x,0)$, $u(0,y)$ на характеристиках $y=0$, $x=0$: если $\alpha(y)$, $\beta(x)$ удовлетворяют условиям (2), (8), $\alpha(y)+\beta(x)\neq 0$, заданные граничные значения $u(x,0)$, $u(0,y)$ решения непрерывно-дифференцируемые функции, то решение $u(x,y)$ задачи Гурса имеет вид

$$u(x,y)=\frac{\alpha(0)+\beta(x)}{\alpha(y)+\beta(x)}u(x,0)+\frac{\beta(0)+\alpha(y)}{\alpha(y)+\beta(x)}u(0,y)-\frac{\alpha(0)+\beta(0)}{\alpha(y)+\beta(x)}u(0,0).$$

Результаты исследований: для класса линейных гиперболических уравнений второго порядка в дивергентной форме неклассическим методом, разработанным автором и основанным на применении так называемых потенциалов сопряжённых пар решений исходного и сопряжённого уравнений выведена теорема о среднем, в простом конечном виде построено общее решение уравнения и найдено решение задачи Гурса.

Предложенный нами метод даёт возможность выявить новые свойства решений дифференциальных уравнений, сформулировать и решить задачи с новыми начальными и краевыми условиями, использовать этот математический аппарат в прикладных исследованиях и математическом моделировании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кудрявцев Л.Д.* Математический анализ. В 2-х томах, т. 2. М.: Высшая школа, 1970. 590 с.

2. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 304 с.

3. *Сабитов К.Б.* Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. М.: Наука, 2016. 272 с.

4. *Сабитов К.Б., Сидоров С.Н.* Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием // Известия Вузов. Математика. 2015. № 1. С. 46–59.

5. *Фёдоров Ю.И.* Потенциалы сопряжённых пар гиперболических уравнений и их интерпретация в моделях сорбции газов. В сборнике: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ. Материалы V Всероссийской научно-практической конференции, приуроченной к 110-летию со дня рождения академика А.Н. Тихонова. 2016. С. 171–175.

6. *Фёдоров Ю.И.* Суммирование потенциалов сопряжённых пар гиперболических уравнений. В сборнике: СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ. Материалы международной научно-практической конференции. 2017. С. 299–302.

7. *Фёдоров Ю.И.* О потенциалах сопряжённых пар гиперболических уравнений. В сборнике: Дифференциальные уравнения и смежные проблемы. Материалы Международной научной конференции. В 2-х томах. Ответственный редактор К.Б. Сабитов. 2018. С. 240–242.

8. *Фёдоров Ю.И.* Восстановление обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка по их решениям, представленным в виде сумм решений уравнений первого порядка. В сборнике: Актуальные проблемы науки и образования в современном ВУЗе. сборник трудов IV Международной научно-практической конференции. отв. ред. А.Л. Галиев. 2019. С. 235–239.

9. *Фёдоров Ю.И.* Восстановление гиперболических уравнений второго порядка по их решениям, представленным суммами решений уравнений первого порядка. В сборнике: Физика конденсированного состояния и смежные проблемы. Сборник трудов Международной научной конференции, посвященной 70-летию профессора А.И. Филиппова. К. Б. Сабитов. 2019. С. 120–124.

УДК 517.95

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СОСТАВНОГО ТИПА В ОКРЕСТНОСТИ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ТОЧЕК

Хашимов А.Р., Джуманиязова Х.А.
Toshkent financial institute, Tashkent, Uzbekistan;
abdukomil@yandex.com

В статье установлено энергетические оценки типа принципа Сен-Венана для обобщенных решений уравнений третьего порядка составного типа. Эти оценки дает возможность указать характер стремление к нулю решение уравнение в окрестности нерегулярных точек границы. Отметим, что методика применяемые в нашем исследование можно быть применено для изучения свойств решений уравнения нечетного порядка другого типа.

Ключевые слова: Уравнение третьего порядка, составного типа, нерегулярные точки границы, обобщенные решение, энергетические оценки, принцип Сен-Венана, область с негладкой границей.

Известно что, Мы будем называть точку P на границы $\partial\Omega$ нерегулярной, если ни в какой окрестности U точки P не существует гладкого невырожденного преобразования $U \to R^n$, переводящего $\partial\Omega \cap U$ в $(n-1)-$ мерный шар. В противном случае точка P называется регулярной.

Среди многочисленных подходов к исследованию краевых задач для системы теории упругости в областях с негладкой границей можно выделить два основных. Одним из них является сведение краевой задачи к решению интегральных уравнений. Метод решения уравнений с частными производными, основанный на сведении краевой задачи к интегральным уравнениям, впервые применял Радон для задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа.

Другой подход основан на применении функциональных методов и энергетических оценок. Таким путем можно получить теоремы существования и единственности обобщенного решения, исследуемых задач при весьма слабых ограничениях на структуры границы. Исследование гладкости обобщенного решения проводится отдельно внутри области и окрестности границы. Как известно особенности решений эллиптических уравнений возникают только в окрестности нерегулярных точек. С этим подходом связан также метод изучения свойств обобщенных решений в окрестности границы, основанный на использовании энергетических оценок, выражающих принципом Сен-Венана.

Здесь мы изложим полученные результаты по исследование поведения обобщенного решения уравнения третьего порядка составного типа в окрестности нерегулярной точки границы, основанные на применении энергетические оценки типа принципа Сен-Венана. Отметим, что такие исследование относительно уравнений нечетного порядка проводилась очень мало.

В работах О.А.Олейник и Г.А.Иосифьяна для обобщенных решений первой краевой задачи установлены энергетические оценки (принцип Сен-Венан) в котором учитывает изменение формы тело. Эти оценки позволило получить теоремы единственности решения задачи в ограниченных и неограниченных областях в классе функций, имеющих бесконечный интеграл энергии, а также результаты об устранимых множествах особенностей решения на границе в зависимости от характеристок области. Интеграл энергии решения задачи по области, исключающей окрестность нерегулярной граничной точки, либо должен расти достаточно быстро при уменьшении этой окрестности, либо он ограничен. Работы О.А.Олейник и И.Копачека является дальнейшим развитием этих работ.

Целью данной работы является исследовать уравнения третьего порядка

$$lAu + Bu = f(x), \tag{1}$$

в области $\Omega \subset R^n_+ = \{x: \ x_1 > 0\}$, с краевым условием

$$u|_{\sigma_0 \cup \sigma_1 \cup \sigma_2} = 0, \, l_0 u|_{\sigma_1} = 0, \tag{2}$$

в окрестности нерегулярных точек границы.

Здесь $lu = l_0 u + \alpha(x)\, u, \ \ l_0 u = \alpha^k(x)\, u_{x_k}$,

$$Au = a^{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + a^i(x)\, u_{x_1} + a(x)\, u, \; Bu = b^{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + b^i(x)\, u_{x_1} + b(x)\, u,$$

$$\sigma_0 = \left\{x \in \Gamma : \alpha^k(x)\, v_k(x) = 0\right\}, \; \sigma_1 = \left\{x \in \Gamma : \alpha^k(x)\, v_k(x) > 0\right\},$$

$$\sigma_2 = \left\{x \in \Gamma : \alpha^k(x)\, v_k(x) < 0\right\}, \; \Gamma = \partial\Omega = \sigma_0 \cup \sigma_1 \cup \sigma_2,$$

$v(x) = (v_1(x), v_2(x), ..., v_n(x)) -$ вектор внутренней нормали Γ в точке x.

Если область Ω ограничено, то теорема существование и единственность для решений задачи (1), (2) было доказано в работах А.И.Кожанова.

УДК 517.956.6

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ А.М.НАХУШЕВА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Холиков Д.К.
Ташкентский архитектурно-строительный институт, г. Ташкент, Узбекистан;
xoliqov23@mail.ru

В работе изучена разрешимость нелокальной задачи с условиями типа А.М.Нахушева для нагруженного псевдопараболического уравнения третьего порядка.

Ключевые слова: уравнение псевдопараболического типа, нагруженное уравнение, многоточечная нелокальная задача, метод Римана, единственность, существование.

THE PROBLEM WITH NONLOCAL A.M. NAKHUSHEV'S CONDITIONS FOR A LOADED EQUATION OF THE THIRD ORDER

Kholikov D.K.
Tashkent Institute of Architecture and Civil Engineering, Tashkent, Uzbekistan;
xoliqov23@mail.ru

We consider solvability of the nonlocal problem with boundary conditions of A.M.Nakhushev's type for pseudoparabolic equation of the third type.

Key words: equation of pseudoparabolic type, loaded equation, multipoint nonlocal problem, Rieman method, uniqueness, existence.

В области $D = \{(x,t) : \ 0 < x < l, \ 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение в частных производных третьего порядка

$$Mu \equiv Lu + \int\limits_0^l k(x,t)u(x,t)dx = f(x,t), \tag{1}$$

где $Lu \equiv u_{xxt} + d(x,t)u_t + a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_{xt} + c(x,t)u_x + e(x,t)u$ – псевдопараболический оператор, а $k(x,t)$ и $f(x,t)$ – заданные функции.

Нелокальная задача. *Требуется найти в области D решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию*

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

и нелокальным условиям

$$u(0,t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t)u(x_k,t) + \psi_1(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u_x(0,t) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k(t)u_x(x_k,t) + \psi_2(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

где x_k – произвольные фиксированные точки, причем $0 \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le l$, $\varphi(x)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\alpha_k(t)$, $\beta_k(t)$ – заданные функции, такие, что

$$\psi_1(0) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(0)\psi_1(x_k) + \varphi_1(0), \quad \psi_1^{'}(0) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k(0)\psi_1(x_k) + \varphi_2(0).$$

Здесь и ниже под регулярным в области D решением уравнения (1) подразумевается функция $u(x,t)$, непрерывная в D вместе со своими частными производными, входящими в уравнение, и обращающая его в тождество.

Рассматриваемую нелокальную задачу исследуем в пространстве $C^{2,1}(D)\bigcap C^{1,0}(\overline{D})$.

Имеет место следующая

Теорема . *Пусть коэффициенты уравнения (1) для всех $(x,t) \in D$ удовлетворяют условиям*

$$a(x,t) \in C^{1,0}(\overline{D}) \cap C^{2,0}(D); \quad b(x,t) \in C^{1}(\overline{D}) \cap C^{1,1}(D);$$

$$c(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^{1,0}(D); \quad d(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^{0,1}(D); \quad e(x,t) \in C(\overline{D}).$$

Кроме того, $d(x,t) < 0$ для любой $(x,t) \in \overline{D}$. Если

$$\psi_i(x) \in C^2[0,l], \ \varphi_i(t), \alpha_k(t), \ \beta_k(t) \in C^1[0,h], \quad i = 1,\, 2, \quad k = \overline{1,n},$$

то нелокальная задача (1)-(4) разрешима и притом единственным образом.

Теорема доказывается методом Римана.

Для это сначала исследуем вспомогательную задачу Гурса: *требуется найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в области D решением уравнения*

$$Lu = F(x,t), \tag{5}$$

удовлетворяющим начальное условие (2) и следующие граничные условия

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u_x(0,t) = \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{6}$$

где

$$F(x,t) = f(x,t) - \int\limits_0^l k(x,t)u(x,t)dx,$$

$\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ – пока неизвестные функции, и при этом будем предполагать, что

$$\mu_1(0) = \varphi(0), \qquad \varphi^{'}(0) = \mu_2(0).$$

Известно (см. например [2,3]), что, если функции

$$\varphi(x) \in C^1[0,l] \cap C^2(0,l), \quad \mu_1(t), \mu_2(t) \in C^1[0,T],$$

то решение задачи Гурса существует и единственно.

Используя решение задачи Гурса, нелокальная задача (1)-(4) сводиться к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Откуда, в силу условий Теоремы, следует существование и единственность решения рассматриваемой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сабитов К.Б.* Уравнения математической физики. М.: Высшая школа. 2003. 255 с.

2. *Шхануков М.Х.* О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференц. уравнения. 1982. – том 18. № 4. С. 689–699.

3. *Зикиров О.С., Холиков Д.К.* Разрешимость некоторых нелокальных задач для нагруженного уравнения третьего порядка // Сибирские электронные математические известия. 2020. – том 17. С. 77–88.

УДК 517.95

ТРЕТЬЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ПОЛУПОЛОСЕ С НЕОДНОРОДНЫМ НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ B-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Хуштова Ф.Г.
Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН, г. Нальчик, Россия; khushtova@yandex.ru

Исследуется третья краевая задача в полуполосе с неоднородным начальным условием для параболического уравнения с оператором Бесселя. Доказаны теоремы существования и единственности решения.

Ключевые слова: оператор Бесселя, B-параболическое уравнение, функции Бесселя, функция типа Миттаг-Леффлера.

THE THIRD BOUNDARY VALUE PROBLEM IN A HALF-STRIP WITH AN INHOMOGENEOUS INITIAL CONDITION FOR A B-PARABOLIC EQUATION

Khushtova F.G.
Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardin-Balkar Scientific Centre of RAS, Nalchik, Russia; khushtova@yandex.ru

In this thesis, we investigate the third boundary value problem in the half-strip with an inhomogeneous initial condition for a parabolic equation with the Bessel operator. Theorems of existence and uniqueness of the solution are proved.

Key words: Bessel operator, B-parabolic equation, Bessel functions, Mittag-Leffler type function.

В области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < \infty,\ 0 < y < T\}$ рассмотрим уравнение

$$B_x u(x, y) - u_y(x, y) = 0, \tag{1}$$

где

$$B_x \equiv x^{-b} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^b \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{b}{x} \frac{\partial}{\partial x}$$

– оператор Бесселя, $|b| < 1$.

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовём функцию $u = u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω, и такую, что $u, x^b u_x \in C(\bar{\Omega})$, $B_x u$, $u_y \in C(\Omega)$, $\bar{\Omega}$ – замыкание области Ω.

Задача. *Найти регулярное в области Ω решение уравнения* (1)*, удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < \infty, \tag{2}$$

$$\lim_{x \to 0} x^b u_x(x, y) = h u(0, y), \quad 0 < y < T, \tag{3}$$

где $\varphi(x)$ – заданная функция.

Далее в работе $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера [1, с. 15], [2, с. 11]; $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода порядка ν [2, с. 139], [3, с. 13], [4, с. 129]; $E_{\rho,\mu}(z)$ – функция типа Миттаг-Леффлера [5, с. 117].

Примем обозначения

$$\beta = \frac{1-b}{2}, \quad \lambda = \frac{2^{2\beta-1}\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta)}\, h, \quad E(y) = y^{\beta-1} E_{\beta,\beta}\left(-\lambda y^\beta\right),$$

$$G(x, \xi, y) = \frac{x^\beta \xi^\beta}{2y}\, I_{-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right) e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4y}},$$

$$K(x, \xi, y) = \frac{x^\beta \xi^\beta}{y} K_{-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right) e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4y}},$$

$$\widetilde{G}(x, \xi, y) = G(x, \xi, y) - \frac{\sin \beta\pi}{\pi} \lambda\, K(x, \xi, y) * E(y).$$

Теорема 1. *Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна при $x \geqslant 0$, ограничена при $x \to \infty$ и удовлетворяет условию согласования*

$\lim\limits_{x\to 0} x^b\varphi(x) = h\varphi(0)$. *Тогда функция*

$$u(x,y) = \int\limits_0^\infty \xi^{1-2\beta}\widetilde{G}(x,\xi,y)\,\varphi(\xi)\,d\xi \tag{1}$$

является решением задачи $(1)-(3)$.

Теорема 2. *Пусть* $h \geqslant 0$. *Тогда существует не более одного регулярного решения задачи* $(1)-(3)$ *в классе ограниченных при* $x \to \infty$ *функций.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965. 296 с.
2. *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. М.: Физматлит, 1963. 360 с.
3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1966. 296 с.
4. *Кузнецов Д.С.* Специальные функции. М.: Высшая школа. 1962. 248 с.
5. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука. 1966. 672 с.

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПЕРИДИНАМИКИ

Шералиев Ш.Н.
Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Ташкенте, Узбекистан
shuhrat2500@mail.ru

Рассматривается квазилинейное интегро-дифференциальное уравнение перидинамики с нелинейностью в виде интегрального оператора Урысона. Доказано существование и единственность непрерывного периодического решения.

Ключевые слова: Квазилинейное периодическое интегро-дифференциальное уравнение; интегральный оператор Урысона; уравнение Вольтерра второго рода.

ON THE QUASI-LINEAR PERIODIC PROBLEM OF PERIDYNAMICS

Sheraliev Sh.N.
Lomonosov Moscow State University, Tashkent Branch, Tashkent, Uzbekistan
shuhrat2500@mail.ru

The quasi-linear periodic integro-differential equation of peridynamics is considered. In case where non-linearity is described by Uryson's integral operator, the local existence and uniqueness of continuous solution is proved.

Key words: The quasi-linear periodic integro-differential equation; Uryson's integral operator; Volterra integral equation of the second kind.

We consider a quasi-linear periodic peridynamic continuum model which is described by the following integro-differential equation:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \int\limits_{\mathbb{T}^n} K(x,y)[u(x,t)-u(y,t)]dy + \int\limits_{\mathbb{T}^n} g(x,y,u(y,t))\,dy = f(x,t), \tag{1}$$

for all $x \in \mathbb{T}^n, t > 0$, with initial values

$$u(x,0) = \phi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x), \qquad x \in \mathbb{T}^n, \quad n \geq 1. \tag{2}$$

Here $\mathbb{T}^n = [-\pi,\pi]^n$, $u : \mathbb{T}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ is unknown function, the kernel K is $n \times n$ matrix-function with domain $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$, $\phi : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^n$ and $\psi : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^n$ are initial data, and $f : \mathbb{T}^n \times \overline{\mathbb{R}_+} \to \mathbb{R}^n$ is the external force.

We assume that the function $g(x,y,u)$ satisfies conditions:

$$g \in C(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n) \quad \text{and} \quad \frac{\partial g}{\partial u_j} \in C(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n),$$

for all $j = 1, 2, ..., n$.

We consider the kernel $K(x,y) = P(x-y), x \in \mathbb{T}^n, y \in \mathbb{T}^n$, where the function $P(x)$ is periodic and has the form

$$P(x) = \frac{(x \otimes x)}{\sigma(x)} \chi(x) + \beta(x), \quad x \in \mathbb{T}^n.$$

The functions σ, χ, and β are from $\in C(\mathbb{T}^n)$ and the function $\sigma(x) \geq 0$ satisfies the following condition:

$$\int_{\mathbb{T}^n} [\sigma(x)]^{-1} |x|^2 \, dx < +\infty.$$

Theorem 1. *Let the initial functions $\phi(x)$ and $\psi(x)$ belong to space $C(\mathbb{T}^n)$, and external force $f(x,t)$ belongs to $C(\mathbb{T}^n \times \overline{\mathbb{R}_+})$.*

Then there exists $T > 0$ such that the solution of the Cauchy problem (1)-(2) on the interval $[0,T]$ exists and is unique.

REFERENCES

1. *S. A. Alimov, Y. Cao and O. A. Ilhan.* On the problems of peridynamics with special convolution kernels. *J. of Integral Equations and Applications*, 26, (3): 301-321, 2014.

2. *S. A. Alimov and S. Sheraliev.* On the solvability of the singular equation of peridynamics, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 64, No. 5, 873-887. 2019.

УДК 519.7; 519.621

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЗНАЧЕНИЙ ИСТОЧНИКОВ В НЕЛОКАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ БОЛЬШОЙ СИСТЕМЫ ОДУ БЛОЧНОЙ СТРУКТУРЫ

Айда-заде К.Р. [1,2] , Ашрафова Е.Р. [1,3]
[1] *Институт Систем Управления, НАНА, г. Баку, Азербайджан;*
[2] *Институт Математики и Механики, НАНА, г. Баку, Азербайджан;*
[3] *Бакинский Государственный Университет, г. Баку, Азербайджан;*
kamil_aydazade@rambler.ru, ashrafova.yegana@gmail.com

Исследуется обратная задача по определению значений источников в нелокальных условиях большой системы ОДУ блочной структуры. Используя дополнительную информацию, рассматриваемая обратная задача приводится к задаче минимизации функционала, зависящего от значений параметров источников в нелокальных условиях. Для минимизации функционала предлагается применить численные методы оптимизации первого порядка, использующие полученные формулы для его градиента. Приводятся результаты численных экспериментов, полученные при решении тестовой задачи, и их анализ.

Ключевые слова: обратная задача, источники, нелокальные условия, сложный объект, блочная структура, большая система ОДУ, градиент функционала.

THE INVERSE PROBLEM FOR DETERMINING THE VALUES OF SOURCES IN NONLOCAL CONDITIONS OF A LARGE SYSTEM OF ODE OF A BLOCK STRUCTURE

Aida-zade K.R. [1,2] , Ashrafova Y.R. [1,3]

[1] *Institute of Control Systems of ANAS, Baku, Azerbaijan,*
[2] *2Institute of mathematics and mechanics of ANAS, Baku, Azerbaijan,*
[3] *Baku State University, st. Z.Khalilov 23, Baku, Azerbaijan,*
kamil_aydazade@rambler.ru, ashrafova.yegana@gmail.com

We investigate the inverse problem of determining the values of sources in nonlocal conditions of a large ODE system of block structure. Using additional information, the considered inverse problem is reduced to the problem of minimizing the functional, depending on the values of the source parameters in nonlocal conditions. To minimize the functional, it is proposed to apply first-order numerical optimization methods using the obtained formulas for its gradient. The results of numerical experiments obtained by solving the test problem and their analysis are presented.

Key words:inverse problem, sources, nonlocal conditions, complex object, block structure, large ODE system, functional gradient.

Рассматривается сложный объект, состоящий из m звеньев (блоков) в произвольном порядке соединенных своими концами, структуру которого удобно представить в виде ориентированного графа. Каждой дуге графа сопоставляется независимый подобъект (блок), состояние которого описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Множество всех вершин графа обозначим через I ,а множество дуг (звеньев) (k,s) длиной l^{ks} с началом в вершине $k \in I$ и концом в вершине $s \in I$ обозначим через $J = \{(k,s) : k,s \in I\}$, $|I| = N, |J| = m, |I|$ указывает на число элементов множества I .

Пусть $J_i^+ = \left\{(j,i) : j \in I_i^+\right\}$, $J_i^- = \left\{(i,j) : j \in I_i^-\right\}$ – множества ребер соответственно входящих и выходящих из i -й вершины, I_i^+ и I_i^- – множества вершин, смежных с i -й вершиной, являющихся соответственно концами и началами дуг из множества $J_i, J_i = J_i^+ \bigcup J_i^-$, $I_i = I_i^+ \bigcup I_i^-$.

Обозначим

$$\left|J_i^+\right| = \left|I_i^+\right| = \bar{n}_i, \left|J_i^-\right| = \left|I_i^-\right| = \underline{n}_i,\ \bar{n}_i + \underline{n}_i = n_i, i \in I.$$

Ясно, что

$$\sum_{i \in I} \bar{n}_i = \sum_{i \in I} \bar{n}_i = m,\ \sum_{i \in I} n_i = 2m.$$

В практических приложениях, как правило, имеет место соотношение $n_i << N, i \in I,$ т.е. число вершин, смежных с какой-либо вершиной, много меньше общего числа вершин.

Пусть состояние каждого из звеньев $(k,i) \in J, k \in I_i^+, i \in I$ описывается системой $\aleph$ -мерных линейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{u}^{ki}(x) = A^{ki}(x)u^{ki}(x) + B^{ki}(x),\ x \in [0, l^{ki}],\ k \in I_i^+,\ i \in I, \qquad (1)$$

с M_i, $M_i \leq n_i \cdot \aleph$, линейно независимыми краевыми условиями, заданными в неразделенном виде:

$$\sum_{s=1, k_s \in I_i^-}^{\underline{n}_i} \underline{c}_j^{ik_s} u^{ik_s}(0) + \sum_{s=1, k_s \in I_i^+}^{\bar{n}_i} \bar{c}_j^{k_s i} u^{k_s i}(l^{k_s i}) = \mathrm{v}_\mathrm{j}^\mathrm{i},\ j = \overline{1, M_i},\ i \in I. \quad (2)$$

В задаче заданными являются: $A^{ki}(x) \neq const$, $B^{ki}(x)-$ соответственно $\aleph-$ мерные квадратные и $\aleph-$ мерные векторные непрерывные при $x \in [0, l^{ki}]$ функции; $l^{ki} > 0$ и строчные векторы $\underline{c}_j^{ik_s} = \left(\underline{c}_{j,1}^{ik_s}, ..., \underline{c}_{j,\aleph}^{ik_s}\right)$, $k_s \in I_i^-, s = \overline{1, \underline{n}_i}$, $\bar{c}_j^{k_s i} = \left(\bar{c}_{j1}^{k_s i}, ..., \bar{c}_{j\aleph}^{k_s i}\right)$, $k_s \in I_i^+, s = \overline{1, \bar{n}_i}$, $j = \overline{1, M_i}$, соответственно размерности $\underline{n}_i \cdot \aleph$ и $\bar{n}_i \cdot \aleph$ $i \in I$. Функция $u^{ki}(x) \in R^{\aleph}$ характеризует состояние (k,i) -го звена длиной l^{ki} в точке $x \in \left[0, l^{ki}\right]$. Здесь неизвестные параметры $\mathrm{v} = \left(\mathrm{v}^i \in V^i \subset R^{M_i}, i \in I\right)$, состоящие из векторов $\mathrm{v}^i = \left(\mathrm{v}_1^i, ..., \mathrm{v}_{M_i}^i\right)^T$, $\mathrm{v}_\mathrm{j}^\mathrm{i}-$ j -я компонента которых определяется воздействиями внешнего источника на i -ю вершину. Для определения неизвестных значений параметров вектора v используем следующую дополнительную информацию:

$$u_2^{ki}(x) = f^{ki}(x)\ k \in I_i^+,\ i \in I,$$

где $f^{ki}(x)$ заданные непрерывные функции. Используя эту информацию, обратную задачу по определению значений мощностей источников в нелокальных условиях большой системы ОДУ блочной структуры приведем к задаче минимизации следующего функционала

$$\Im(w, \mathrm{v}) = \sum_{i \in I} \left(\sum_{k \in I_i^+} \int_0^{l^{ki}} \left(u_2^{ki}(x, \mathrm{v}) - f^{ki}(x)\right)^2 dx \right), \quad (3)$$

при условиях (1), (4). Обозначая $\underline{u}^i = \left(u^{ik_1}(0), ..., u^{ik_{\underline{n}_i}}(0)\right)^T \in R^{\underline{n}_i \cdot \aleph}, \bar{u}^i = \left(u^{k_1 i}(l^{k_1 i}), ..., u^{k_{\bar{n}_i} i}(l^{k_{\bar{n}_i} i})\right)^T \in R^{\bar{n}_i \cdot \aleph}, u_j^i = (\underline{u}_j^i, \bar{u}_j^i)$ и вводя расширенную матрицу $C_i = \left(c_{js}^i\right)_{j=1,s=1}^{M_i, n_i \cdot \aleph}$, $i \in I$, каждая строка которой является расширенным строчным вектором $c_j^i = (\underline{c}_j^i, \bar{c}_j^i)$ размерности $n_i \cdot \aleph$ соотношения (4) запишем в матричной форме:

$$C_i u^i = \mathrm{v}^\mathrm{i},\ \mathrm{i} \in \mathrm{I}.$$

Согласно предположения о линейной независимости условий (4), имеет место
$$rang C_i = M_i. \tag{4}$$
Так как матрица C_i имеет размерность $M_i \times (n_i \cdot \aleph)$, $M_i \leq n_i \cdot \aleph$, $i \in I$, то из матрицы C_i можно извлечь обратимую подматрицу (минор) $\overset{\frown}{C}_i$ с рангом, равным M_i . Изменив порядок столбцов, расширенную матрицу вновь обозначим через $C_i = [\overset{\frown}{C}_i, \breve{C}_i]$. Здесь $\breve{C}_i -$ матрица, составленная из столбцов расширенной матрицы C_i , не включенных в матрицу $\overset{\frown}{C}_i$. Аналогично этому вектор u^i разбивается на M_i - мерный вектор $\overset{\frown}{u}^i = (\overset{\frown}{u}^i_1, ..., \overset{\frown}{u}^i_{M_i})^T$, соответствующий матрице $\overset{\frown}{C}_i$, и $(n_i \cdot \aleph - M_i)$ - мерный вектор $\breve{u}^i = (\breve{u}^i_1, ...\breve{u}^i_{(n_i \cdot \aleph) - M_i})^T$.

Отметим, что общее число дифференциальных уравнений в системе (1) и число краевых условий должны удовлетворять равенству:

$$M = \sum_{i=1}^{N} M_i = m\aleph. \tag{5}$$

Общее число блоков – подсистем (1), равно числу звеньев – m , текущие состояния которых связаны со смежными звеньями (блоками) в произвольном порядке лишь посредством неразделенных (нелокальных) краевых условий.

Теорема. Пусть выполнены условия, наложенные на функции и параметры, участвующие в задаче (1)-(5). Тогда функционал (5) дифференцируем и компоненты градиента функционала (5) по оптимизируемым параметрам для всех $k \in I_i^+, i \in I$ определяются формулами

$$grad_{\mathrm{v}^i} \Im(w, \mathrm{v}) = \left(\overset{\frown}{C}_i^{-1}\right)^T \overset{\frown}{\psi}^i . \tag{6}$$

а непрерывно-дифференцируемая вектор-функция $\psi^{ki}(x) \in R^{\aleph}$, $x \in [0, l^{ki}]$, $k \in I_i^+, i \in I$ является решением сопряженной системы

$$\dot{\psi}^{ki}(x) = 2\left(u_2^{ki}(x, \mathrm{v}) - f^{ki}(x)\right) - (A^{ki}(x))^T \psi^{ki}(x), x \in [0, l^{ki}], \tag{7}$$

с неразделенными краевыми условиями

$$\left(\breve{C}_i\right)^T \left(\overset{\frown}{C}_i^{-1}\right)^T \overset{\frown}{\psi}^i - \breve{\psi}^i = 0, \ i \in I, \tag{8}$$

где $\overset{\frown}{\psi}^i$ и $\breve{\psi}^i$ векторы, компоненты которые составлены из компонент вектора $\psi^i = \left(\left(-\underline{\psi}^i\right)^T, \left(\bar{\psi}^i\right)^T\right)^T$, $\underline{\psi}^i = (\psi^{ik_1}(0), ..., \psi^{ik_{\underline{n}_i}}(0))^T$, $\bar{\psi}^i = (\psi^{k_1 i}(l^{k_1 i}), ..., \psi^{k_{\bar{n}_i} i}(l^{k_{\bar{n}_i} i}))^T$ соответствующими столбцам матриц $\widehat{C}_i$ и $\breve{C}_i$ соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айда-заде К.Р. Ашрафова Е.Р.* Управление воздействиями в правых частях большой системы ОДУ блочной структуры и оптимизация источников в неразделенных краевых условиях // Сиб. журн. вычисл. матем. 2021. Т. 24. № 3. С. 229–248.

2. *Aida-zade K.R., Ashrafova Y.R.* Numerical solution to an inverse problem on a determination of places and capacities of Sources in the hyperbolic systems // Journal of industrial and management optimization-AIMS. 2020. V. 16. №6. P. 3011–3033.

3. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с.

4. *Карчевский А.Л.* Корректная схема действий при численном решении обратной задачи оптимизационным методом // Сиб. журн. вычисл. матем. 2008. Т. 11. № 2. С.39–149.

УДК 517.9

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ МЕСТ И ИСТОЧНИКОВ КОЛЕБАНИЙ МЕМБРАНЫ

Айда-заде К.Р. [1,2] , Гашимов В.А. [1]

[1] *Институт Систем Управления, НАНА, г. Баку, Азербайджан;*

[2] *Институт Математики и Механики, НАНА, г. Баку, Азербайджан;*

kamil_aydazade@rambler.ru, vugarhashimov@gmail.com

Рассматривается обратная задача по определению мест и мощностей сосредоточенных источников, воздействие которых вызвало колебание мембраны. Число источников, области их возможного воздействия и диапазон их мощностей задан. Для решения задачи используются вариационный метод и метод регуляризации. Получены необходимые условия оптимальности идентифицируемых па-

раметров. Для численного решения использованы методы оптимизации первого порядка. Приводятся результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: сосредоточенный источник, мембрана, мощность источника, вариационный метод, необходимые условия оптимальности.

ON ONE INVERSE PROBLEM FOR DETERMINATION OF LOCATIONS AND POWERS OF SOURCES IN THE BEGINNING OF THE MEMBRANE OSCILLATION

Aida-zade K.R. [1,2] , Hashimov V.A. [1]
[1] *Institute of Control Systems of ANAS, Baku, Azerbaijan;*
[2] *Institute of Mathematics and Mechanics of ANAS, Baku, Azerbaijan;*
kamil_aydazade@rambler.ru, vugarhashimov@gmail.com

The inverse problem of determining the locations and powers of lumped sources, the impact of which caused the membrane to vibrate, is considered. The number of sources, the areas of their possible impact and the range of their powers are set. To solve the problem, a variational method and a regularization method are used. The necessary conditions for the optimality of the identified parameters are obtained. First-order optimization methods are used for the numerical solution. The results of numerical experiments are presented.

Key words: lumped source, membrane, source power, variational method, necessary conditions for optimality.

Рассматривается задача определения мест и мощностей воздействия сосредоточенных источников на тонкую изолированную мембрану, в результате которых на мембране возникли колебания. Исследуемый процесс описывается следующей начально-краевой задачей [1,2]:

$$u_t t(x,t) = a^2 \Delta u(x,t) - \mu u_t(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T], \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u_t(x,0) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathcal{O}_\varepsilon(\xi^i), \\ q_i \delta_\varepsilon(x;\xi^i), & x \in \mathcal{O}_\varepsilon(\xi^i), \end{cases} \quad i = 1,2,\ldots,l_1, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \mathrm{n}} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \in (0,T]. \tag{4}$$

Здесь: Δ – оператор Лапласа; T – заданное время наблюдения за процессом, $\Omega \in R^2$ – область, занимаемая мембраной с границей Γ; $\mu \geq 0$ – заданная постоянная, определяемая средой колебания; $\mathcal{O}_\varepsilon(\xi^i)$ – ε-окрестность точки воздействия i-го сосредоточенного воздействия мощностью q_i, $i = 1, 2, \ldots, l_1$; l_1 – число источников; $\delta_\varepsilon(x; \tilde{\xi}) \geq 0$ – непрерывная в Ω функция распределения мощности источника, удовлетворяющая свойствам [2,3]

$$\delta_\varepsilon(x; \tilde{\xi}) = 0 \text{ при } x \notin \mathcal{O}_\varepsilon(\tilde{\xi}), \quad \iint\limits_\Omega \delta_\varepsilon(x; \tilde{\xi}) dx = 1. \tag{5}$$

Идентифицируемыми в задаче являются q_i и ξ^i, $i = 1, 2, \ldots, l_1$, относительно которых известно:

$$\underline{q_i} \leq q_i \leq \overline{q_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, l_1, \tag{6}$$

$$\xi^i \in \Omega^i \subset \Omega, \quad i = 1, 2, \ldots, l_1. \tag{7}$$

Здесь $\underline{q_i}$, $\overline{q_i}$ – заданные величины, определяющие возможные значения мощностей источников, Ω^i – заданные возможные области воздействия, $i = 1, 2, \ldots, l_1$.

Для определения мест и мощностей источников: $\xi = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^{l_1})$, $q = (q_1, q_2, \ldots, q_{l_1})$ имеются результаты наблюдений за состоянием колебаний в заданных l_2 точках $\eta^j \in \Omega$, $j = 1, 2, \ldots, l_2$, мембраны:

$$u^j(t) = u(\eta^j, t), \quad t \in [0, T], \quad j = 1, 2, \ldots, l_2.$$

Используя эти наблюдения, сформируем минимизируемый функционал [4]:

$$J(\xi, q) = \sum_{i=1}^{l_2} \int_0^T \left[u(\eta^j, t; \xi, q) - U^j(t)\right]^2 dt + \sigma \sum_{i=1}^{l_1} \left\{|q^i - \hat{q}^i|^2 + \|\xi^i - \hat{\xi}^i\|^2_{R^2}\right\} \tag{8}$$

Здесь $u(x, t; \xi, q)$ – решение начально-краевой задачи (1)–(6) при заданных местах ξ и мощностях q источников колебаний; σ, $\hat{\xi}$, $\hat{q}$ – параметры регуляризации [4].

Таким образом задача идентификации мест и мощностей источников колебаний приведена к параметрической задаче оптимального управления (1)–(8).

Относительно этой задачи получены необходимые условия оптимальности идентифицируемых параметров. Полученные условия позволяют применить известные эффективные численные методы конечномерной оптимизации [4,5].

В докладе будут приведены результаты численных экспериментов и их анализ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.

2. *Айда-заде К.Р., Гашимов В.А.* Синтез локально сосредоточенных управлений стабилизацией мембраны с оптимизацией размещения точек контроля и гасителей колебаний // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. 2020. Т. 60. № 7. С. 1126–1142.

3. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1984. 568 с.

4. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.

5. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 2008. 384 с.

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Алимов Ш.А., Худайбергенов А.

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, г. Ташкент, Узбекистан;

sh_alimov@mail.ru

Рассматривается задача об отыскании температуры на верхнем основании прямой круговой цилиндрической поверхности при известных условиях на нижнем основании. Доказаны существование и единственность решения данной задачи.

Ключевые слова: уравнение Лапласа, задача Коши, существование, единственность.

ON THE SOLVABILITY OF THE CAUCHY PROBLEM FOR LAPLACE EQUATION

Shavkat ALIMOV, Allambergen KHUDAYBERGENOV
National university of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan;
sh_alimov@mail.ru

The problem of finding the temperature on the upper base of a straight circular cylindrical surface under known conditions on the lower base is considered. The existence and uniqueness of the solution of this problem are proved.

Key words: Laplace equation, Cauchy problem, existence, uniqueness.

Consider the process of heating the following cylindrical surface (thin-walled pipe)

$$S \;=\; \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2=R^2,\; 0\le z\le h\}.$$

At the lower base of the cylinder, the given temperature is maintained and there is no heat flow. We need to find the temperature at the top base of the cylinder.

We introduce the cylindrical coordinates

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x},\quad z=z.$$

Then

$$S \;=\; \{(r,\theta,z) \;:\; r=R,\; -\pi\le\theta\le\pi,\; 0\le z\le h,\}$$

The process of heating is described by equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} \;-\; \Delta u \;=\; f.$$

Hence, we have for the temperature $u(\theta,z,t)$ equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} \;-\; \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \;-\; \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \;=\; f. \tag{1}$$

The boundary conditions are

$$u(-\pi,z,t)=u(\pi,z,t),\quad \frac{\partial u}{\partial\theta}(-\pi,z,t)=\frac{\partial u}{\partial\theta}(\pi,z,t),\quad 0\le z\le h,$$

$$\frac{\partial u(\theta,0,t)}{\partial z} \;=\; 0, \quad -\pi \le \theta \le \pi,$$

and

$$u(\theta,0,t) = \phi(\theta), \quad -\pi < \theta < \pi.$$

It is necessary to find the temperature $u(\theta,h,t)$ on the top base $z = h$. For the computational aspect of this problem, see, for example, [1].

We are looking for a stationary solution, i. e. a time-independent solution $u = u(\theta,z)$. In this case equation (1) takes the form

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \;+\; \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \;=\; g.$$

In what follows we assume that $R = 1$. Hence, we consider equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \;+\; \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \;=\; g(\theta,z), \quad (\theta,z) \in S, \tag{2}$$

with boundary conditions

$$u(\theta,0) = \phi(\theta), \quad \frac{\partial u(\theta,0)}{\partial z} \;=\; 0, \quad -\pi \le \theta \le \pi. \tag{3}$$

Suppose that the function $\phi(\theta)$ that determines the temperature on the lower base belongs to a certain Hilbert space H_1. Further, suppose that the function $\psi(\theta)$ that determines the temperature on the upper base belongs to a some Hilbert space H_2.

Consider operator $A : H_1 \to H_2$ that acts as follows:

$$A\phi \;=\; \psi.$$

It is well known that the problem (2)-(3) is ill-posed (see [2], [3]). This means that the operator A acting in classical spaces like Sobolev space is unbounded. Moreover, the domain of the operator A, being part of Sobolev-type spaces, cannot coincide with any of them.

Another difficulty associated with the solution of problem (2)-(3) is caused by the fact that the function $\phi(\theta)$ is given approximately with some error. Because of unboundedness of the operator A arbitrarily small changes of ϕ lead to significant changes in ψ. Moreover, arbitrarily small changes in ϕ can get out of the domain of the operator A. Hence, the problem of finding a class of functions for which a solution exists is important.

Let us denote by the symbol $D(S)$ the class of functions which are infinitely differentiable on the cylindrical surface S and vanish near the upper base $z = h$.

Definition. *Let $\phi \in L_2[-\pi,\pi]$. We say that the function $u(\theta,z)$ from $L_2(S)$ is a solution to the problem (2)-(3) if for any function $v \in D(S)$ the following equation*

$$\int\limits_S u(\theta,z)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)d\theta\,dz \;=\; \int\limits_{-\pi}^{\pi}\phi(\theta)\frac{\partial v}{\partial z}(\theta,0) \;+\; \int\limits_S u(\theta,z)g(\theta,z)\theta dz$$

is valid.

Denote by A_σ the set of functions $f(\zeta)$ which are holomorphic on the stripe

$$P_\sigma \;=\; \{\zeta\in\mathbb{C} \;:\; |\mathrm{Im}\,\zeta|\le\sigma\}$$

and satisfy conditions

$$f(\zeta+2\pi)=f(\zeta),\quad \zeta=\xi+i\eta\in P_\sigma.$$

and

$$\|f\|_\sigma^2 \;=\; \sup_{|\eta|\le\sigma}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(\xi+i\eta)|^2\,d\xi \;<\; +\infty.$$

Consider the Fourier series

$$f(\xi) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ik\xi}.$$

Theorem. *For any function $f\in A_\sigma$ the following inequality*

$$C_1\|f\|_\sigma^2 \;\le\; \sum_{k=-\infty}^{\infty}|f_k|^2\cosh^2\sigma k \;\le\; C_2\|f\|_\sigma^2$$

is valid.

It follows from this theorem that for any $\phi\in A_\sigma$ and $g\in A_\sigma$, $0\le z\le h$, where $\sigma\ge h$, the solution of the Cauchy problem (2)-(3) exists and is unique.

Example. Consider for $p > 1$ the function

$$\phi(\theta) \ = \ \frac{1}{p + \cos\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

The function

$$f(\zeta) \ = \ \frac{1}{p + \cos\zeta}, \quad \zeta \in \mathbb{C},$$

belongs to A_σ in case where $\sigma < \ln(p + \sqrt{p^2+1})$.

Therefore, we can state that the solution exists if the height h of the cylinder satisfies condition $h < \ln(p + \sqrt{p^2+1})$.

REFERENCES

1. *A. Gavrikov, G. Kostin.* Heat Transfer Processes in a Cylindrical Body Surrounded by Air, Proc. of 59th MIPT Scientific Conference, Moscow, Russia, 2016.
2. *Tikhonov A.N., Goncharsky A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G.* Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems, Kluwer Academic Publishers, 1995.
3. *Kabanikhin, S. I.* Inverse and Ill-posed Problems: Theory and Applications, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin/Boston, Inverse Ill-posed Probl. Ser. 55, 2012.

УДК 517.95

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОРЯДКА ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В УРАВНЕНИЯХ СМЕШАННОГО ТИПА

Ашуров Р.Р., Зуннунов Р.Т.
Институт Математики АН РУз,, г. Ташкент, Узбекистан;
ashurovr@gmail.com, zunnunov@mail.ru

В работе исследована обратная задача по определению порядков дробных производных в уравнениях смешанного типа. В одной части области рассмотренное уравнение является уравнением субдиффузии с дробной производной порядка $\alpha \in (0,1)$ *в смысле Герасимова-Капуто, а в другой - волновое уравнение с дробной производной порядка* $\beta \in (1,2)$. *Эллиптическая часть уравнения состоит из оператора второго порядка, рассматриваемый в* N *-мерной области* Ω.

Считая параметры α и β неизвестными, найдены дополнительные условия, которые обеспечивают однозначное определение искомых параметров.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, дробная производная в смысле Герасимова-Капуто, обратная задача по определению порядка производной.

INVERSE PROBLEM FOR DETERMINING THE ORDER OF FRACTIONAL DERIVATIVE IN MIXED-TYPE EQUATIONS

Ashurov R.R., Zunnunov R.T.
Institute of Mathematics AS RUz, Tashkent, Uzbekistan;
ashurovr@gmail.com, zunnunov@mail.ru

In this paper the inverse problem of determining the fractional orders in mixed-type equations is considered. In one part of the domain the considered equation is the subdiffusion equation with a fractional derivative in the sense of Gerasimov-Caputo of the order $\alpha \in (0,1)$, and in the other part - a wave equation with a fractional derivative of the order $\beta \in (1,2)$. The elliptic part of the equation is a second-order operator, considered in a N - dimensional domain Ω. Assuming the parameters α and β to be unknown, additional conditions are found that provide an unambiguous determination of the required parameters.

Key words: mixed - type equation, fractional derivative in the sense of Gerasimov-Caputo, the inverse problem of determining the orders of fractional derivative.

Пусть Ω - произвольная N-мерная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть далее дифференциальный оператор второго порядка

$$A(x,D)u = \sum_{i,j=1}^{N} D_i[a_{i,j}(x)D_j u] - c(x)u$$

является симметричным эллиптическим оператором в Ω, т.е.

$$a_{i,j}(x) = a_{j,i}(x) \quad \text{и} \quad \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq a\sum_{i,j=1}^{N}\xi_i^2,$$

для всех $x \in \Omega$ и ξ_i, где $a = const > 0$ и $D_j u = \frac{\partial u}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, N$.

Рассмотрим спектральную задачу с условием Дирихле

$$-A(x,D)v(x) = \lambda v(x), \quad x \in \Omega; \tag{1}$$

$$v(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{2}$$

Известно (см. например [1]), что, если коэффициенты оператора $A(x,D)$ и граница области Ω являются достаточно гладкими и $c(x) > 0$, то спектральная задача (1) - (2) имеет полное в $L_2(\Omega)$ множество ортонормированных собственных функций $\{v_k(x)\}$, $k \geq 1$, и счетное множество положительных собственных значений $\{\lambda_k\}$.

Пусть $0 < \alpha < 1$ и $1 < \beta < 2$. В области $\Omega \times (-T, +\infty)$, $T > 0$, рассмотрим уравнение, имеющее смешанный тип

$$\begin{cases} D_{0t}^{\alpha} u(x,t) - A(x,D)u(x,t) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0; \\ D_{0t}^{\beta} u(x,t) - A(x,D)u(x,t) = 0, \quad x \in \Omega, \quad -T < t < 0. \end{cases} \tag{3}$$

В качестве граничного условия возьмем условие Дирихле, т.е.

$$u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq -T. \tag{4}$$

Пусть начальное условие имеет вид

$$u(x,-T) = \varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{5}$$

Условия склеивания возьмем ввиде

$$u(x,+0) = u(x,-0), \quad \lim_{t\to+0} D_{0t}^{\alpha} u(x,t) = u_t(x,-0), \quad x \in \Omega. \tag{6}$$

Здесь D_{0t}^{α} дробная производная в смысле Герасимова-Капуто порядка α (см. [2]).

Начально-краевую задачу (3)-(6) назовем *прямой задачей.*

Далее удобно ввести обозначения: $G^+ = \overline{\Omega} \times (0, +\infty)$ и $G^- = \overline{\Omega} \times (-T, 0)$.

Определение 1. Функцию $u(x,t) \in C(\overline{\Omega} \times [-T, 0) \cap (0, \infty))$ со свойствами

1. $A(x,D)u(x,t) \in C(G^+ \bigcup G^-)$,
2. $D_{0t}^{\alpha} u(x,t) \in C(G^+)$
3. $D_{t0}^{\beta} u(x,t) \in C(G^-)$

и удовлетворяющей условиям (3)-(6), будем называть *(классическим) решением прямой задачи.*

Обозначим через Δ_k , $k \geq 1$, функцию

$$\Delta_k \equiv \Delta_k(T,\beta) = \lambda_k T E_{\beta,2}(-\lambda_k T^\beta) - E_{\beta,1}(-\lambda_k T^\beta)$$

где $E_{\rho,\mu}(t)$ - функция Миттаг-Леффлера [2].

Лемма 1. Существует постоянная $T_0 = T_0(\lambda_1, \beta)$ такая, что при $T \geq T_0$ справедлива оценка

$$\Delta_k > \delta_0 > 0, \quad k \geq 1,$$

где константа $\delta_0 = \delta_0(T)$ не зависит от λ_k .

Обозначим символом $W_2^m(\Omega)$ классическое пространство Соболева и символом $[b]$ целую часть числа b . Решение прямой задачи в областях $G^\pm$ обозначим соответственно $u^\pm(x,t)$, а через φ_k - коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$. по системе собственных функций $\{v_k(x)\}$ спектральной задачи (1)-(2).

Теорема 1. Пусть выполнено условие леммы 1 и пусть φ удовлетворяет условиям

$$\varphi(x) \in W_2^{\left[\frac{N}{2}\right]+2}(\Omega), \tag{7}$$

$$\varphi(x) = A(x,D)\varphi(x) = \cdots = A^{\left[\frac{N}{4}\right]}(x,D)\varphi(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{8}$$

Тогда существует единственное решение прямой задачи и оно представимо ввиде следующих рядов

$$u^+(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^\alpha)\varphi_k v_k(x)}{\Delta_k}, \quad 0 \leq t < \infty, \tag{9}$$

$$u^-(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[|t|\lambda_k E_{\beta,2}(-\lambda_k |t|^\beta) - E_{\beta,1}(-\lambda_k |t|^\beta)\right]\varphi_k v_k(x)}{\Delta_k},$$

$$-T \leq t \leq 0, \tag{10}$$

которые сходятся абсолютно и равномерно по $x \in \overline{\Omega}$ и по t в указанных выше областях.

Эта теорема доказывается на основании леммы 1 и методом Фурье.

Теперь предположим, что порядки дробных производных α и β являются неизвестными и рассмотрим обратную задачу по определению этих параметров. Поскольку неизвестных два, то зададим следующие два дополнительных условия:

$$\int\limits_{\Omega} |u(x,t_1)|^2 dx = d_1, \tag{11}$$

$$\int\limits_{\Omega} u(x,-t_2) v_{k_0}(x) dx = d_2, \tag{12}$$

где d_1, d_2 - произвольные заданные числа, t_1, t_2 - положительные числа, которые определены в теореме 2, приведенной ниже и $k_0 \geq 1$ - произвольное целое такое, что $\varphi_{k_0} \neq 0$ (очевидно, такие числа существуют, так как $\varphi(x)$ не является тождественным нулем).

Начально-краевую задачу (3)-(6) вместе с дополнительными условиями (11), (12) назовем *обратной задачей* по определению параметров α и β. Если $u(x,t)$ решение прямой задачи и параметры α и β удовлетворяют условиям (11), (12), то тройку $\{u(x,t), \alpha, \beta\}$ назовем *решением обратной задачи*.

При решение обратной задачи будем предполагать, что

$$0 < \alpha_1 \leq \alpha < 1, \quad 1 < \beta_1 \leq \beta \leq \beta_2 < 2.$$

где α_1, β_1 и β_2 - произвольные заданные числа из соответствующих интервалов. Следует отметить, что интеграл в (11) зависит от обоих параметров α и β, в то время как левая часть условия (12) зависит только от параметра β (см. вид решения прямой задачи (9) и (10). Поэтому, естественно, для решения обратной задачи, найдем сначала параметр $\beta^\star$ из условия (12), затем, предполагая что параметр $\beta^\star$ уже известен, найдем параметр $\alpha^\star$, удовлетворяющий условию (11).

Введем следующие обозначения

$$W(\alpha,\beta) = \int\limits_{\Omega} |u(x,t_1)|^2 dx, \quad P(\beta) = \frac{\Delta_{k_0}(t_2,\beta)}{\Delta_{k_0}(T,\beta)}.$$

Используя явный вид решения (10) и ортонормированность функций $v_k(x)$, условие (12) можно переписать ввиде (напомним, что $\varphi_{k_0} \neq 0$)

$$P(\beta)\varphi_{k_0} = d_2. \tag{13}$$

Чтобы обратная задача имела решение числа d_1 и d_2 не могут задаваться произвольным образом. Необходимым условием разрешимости уравнения (13) является выполнение следующего неравенства

$$P(\beta_1) \leq \frac{d_2}{\varphi_{k_0}} \leq P(\beta_2). \tag{14}$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Найдется число $T_{1,2} = T_{1,2}(\lambda_1, \beta_1, \beta_2)$ такое, что при $T_{1,2} \leq t_2 < T$ существует единственное число $\beta^\star$, удовлетворяющее условию (12). Далее, существует положительное число $T_3 = T_3(\lambda_1, \alpha_1)$ такое, что при $t_1 \geq T_3$ необходимое и достаточное условие существования единственного решения $\{u(x,t), \alpha, \beta^\star\}$ обратной задачи имеет вид

$$W(1, \beta^\star) < d_1 \leq W(\alpha_1, \beta^\star). \tag{15}$$

Доказательство теоремы 2 основано на свойствах монотонности функций Миттаг - Леффлера $E_{\rho,\mu}(t)$ по параметру ρ доказанных авторами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин В.А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // Успехи математических наук. 1960. № 2. С. 97-154.

2. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка М. : Наука, 2005. 199 с.

УДК 517.95

INTEGRATION OF THE DISCRETE SINE-GORDON EQUATION WITH A SELF-CONSISTENT SOURCE

Babajanov B.A. [1] **, Babadjanova A.K.** [2] **, Azamatov A.Sh.** [3]
[1,3] *Urgench State University, Urgench, Uzbekistan;*
[2] *Khorezm Regional Branch of the V. I. Romanovsky Mathematical Institute Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Urgench, Uzbekistan;*
a.murod@mail.ru, oygul@bk.ru

This work is devoted to the application of the inverse scattering theory for integration of the discrete Sine-Gordon equation with a self-consistent source.

Key words: discrete sine-Gordon equation, self-consistent source, discrete Dirac-type operator, scattering data, inverse scattering method.

Hirota showed the integrabilty of discrete version of the sine–Gordon equation and found its Lax pair, Backlund transformations and N-soliton solutions [1]. In [2] generalization of Hirota's discretization scheme for the sine-Gordon equation was considered. The soliton solutions are obtained by extending the generalized inverse method [3] and the related linear spectral problem for the discrete sine-Gordon equation was studied in [4].

It needs to point out the sG equations and its close allies (the sinh-Gordon, elliptic sine-Gordon, elliptic sinh-Gordon equations) are valued in the investigation of a great variety of diverse fields[5], such as the study of surfaces with constant negative curvature, or integrable surfaces [6-7], elementary particle physics, quantum optics, Josephson junctions [8], nonlinear excitations in condensed matter physics [9-10], vortex structures in fluids and plasmas [11].

This study investigated the integration of the discrete sine-Gordon equation with a self-consistent source via the inverse scattering method. There are works on deriving the sine-Gordon equation and the hierarchy of the sine-Gordon equation with self-consistent sources and finding the multisoliton solutions with different methods [12-13].

The first investigation of the soliton equations with self-consistent sources has been considered in [14] and still attracts considerable attention in recent years [15-16, see also their reference].

We consider the following system of equations

$$\dot{\theta}_{n+1}-\dot{\theta}_n=2\left(\sin\theta_{n+1}+\sin\theta_n\right)+\sum_{k=1}^{N}\left(f_{1,n+1}^k f_{1,n}^k+f_{2,n+1}^k f_{2,n}^k\right), n\in Z, \tag{1}$$

$$\theta_n(t)|_{t=0}=\theta_{n,0}, \tag{2}$$

$$L_n(z_k)f_n^k=f_{n+1}^k, \tag{3}$$

where $f_n^k=f_n(z_k,t)$, $\hat{f}_n^k=\sigma_2 f_n(z_k,t)$ column-vector functions satisfy the following normalizing conditions

$$\beta_k=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(f_i^k\right)^T\left(Q_i-P_i\right)\sigma_2 f_i^k\right), \tag{4}$$

$$\hat{\beta}_k=\frac{1}{z_k^2+1}\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(\hat{f}_i^k\right)^T\left(z_j^2 Q_i-P_i\right)\sigma_2\hat{f}_i^k\right). \tag{5}$$

Here dot means the derivative respect to time and

$$L_n(z,t)=zP_n(t)+\frac{1}{z}Q_n(t),\ \ \sigma_2=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},$$

$$P_n(t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\cos\theta_n(t) & \sin\theta_n(t)\\ \sin\theta_n(t) & 1-\cos\theta_n(t)\end{pmatrix},$$

$$Q_n(t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-\cos\theta_n(t) & -\sin\theta_n(t)\\ -\sin\theta_n(t) & 1+\cos\theta_n(t)\end{pmatrix},$$

and β_k , $\hat{\beta}_k$ are scalar continuous functions.

The purpose of the work is to find the set of functions

$$\{\theta_n(t),\ f_n^k(t)\}$$

supposing the existence in the class of functions

$$\lim_{n|\to\pm\infty}\omega_n=\lim_{|n|\to\pm\infty}\sum_{j=n}^{\infty}\sin\theta_j(t)=0,\quad \theta_n(t)_{n|\to\infty}=0(mod\pi) \tag{6}$$

which is the solution of the considering (1)-(3) problem.

We look through the IST for the spectral problem which is associated with the discrete sine-Gordon equation which was studied in [4]

$$\chi_{n+1} = L_n(z)\chi_n, \tag{7}$$

We denote by $\phi_n^{\pm}(z)$ and $\psi_n^{\pm}(z)$ the vector Jost functions of (7) defined for z on the unit circle $C_1 = \left(\frac{z}{|z|} = 1\right)$. For them the following relations are valid

$$\phi^{\pm}(n,z) = \pm a^{\pm}(z)\psi^{\mp}(n,z) + b^{\pm}(z)\psi^{\pm}(n,z). \tag{8}$$

$a^{\pm}(z)$, defined by equation (4) on C_1, have, at most, a finite number of zeroes in C_1, which, due to the fact that $a^{\pm}(z)$ are functions of z^2, come always in pairs $\pm z_k^{\pm}, (k = 1, ..., N)$.

The set of the quantities

$$\{R^{\pm}(z) = \frac{b^{\pm}(z)}{a^{\pm}(z)}, |z| = 1, \ \pm z_k^{\pm}, \ C_k^{\pm} = \frac{b^{\pm}(z_k^{\pm})}{\frac{da^{\pm}(z)}{dz|_{z_k^{\pm}}}} + \frac{b^{\pm}(-z_k^{\pm})}{\frac{da^{\pm}(z)}{dz|_{-z_k^{\pm}}}}, \ k = 1, ..., N\}$$

is called the scattering data for equations (7).

The potential $\theta(n,t)$ can be recovered by the scattering data in a unique way [see 4].

Theorem. If the set of functions $\{\theta_n(t), f_n^k(t)\}$ represent the solution of the (1)-(3) in the class of functions (6), then the scattering data of the $L_n(t)$ operator with the potential $\theta_n(t)$ satisfy the following time evolution equations

$$\dot{R}(z) = -2\left(\frac{z^2+1}{z^2-1}\right)R(z), \qquad |z| = 1, \ z \neq \pm 1,$$

$$\dot{z}_k = 0, \ \dot{C}_k = \left(-2\frac{z_k^2+1}{z_k^2-1} + \beta_k + \hat{\beta}_k\right)C_k, k = 1, ..., N.$$

The obtained results completely define the time evolution of the scattering data, which allows us to solve the problem (1)–(3) by using the method of the inverse spectral problem of (7).

REFERENCES

1. *Hirota R.* 1977, J. Phys. Soc. Japan, 43, 2079.
2. *Orfanidis S.* 1978 J. Phys. Rev. D 18 3822.

3. *Levi D., Ragnisco O., Bruschi M.* 1980, Nuovo Cimento A 58 56.

4. *Pilloni L. and Levi D.* The Inverse Scattering Transform for Solving the Discrete Sine-Gordon Equation // Physics Letters A, 92 (1982), 1, pp. 5-81982.

5. *Fritz Gesztesy, Helge Holden.* A Local Sine-Gordon Hierarchy and its Algebro-Geometric Solutions // arXiv:solv-int/9707010

6. *Bobenko A. I.* Constant mean curvature surfaces and integrable systems // Russ. Math. Surv.46:4 , 1991, 1–45.

7. *Melko M., Sterling I.* Application of soliton theory to the construction of pseudospherical surfaces in R3// Ann. Global Anal. Geometry 11 ,1993, pp. 65–107.

8. *Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., and Morris H.C.* Solitons and Nonlinear Wave Equations, Academic Press, London, 1982.

9. *Borisov A.B., Kiseliev V.V.* Topological defects in incommensurate magnetic and crystal structures and quasi-periodic solutions of the elliptic sine-Gordon equation // Physica D 31 ,1988, 49–64.

10. *Borisov A.B., Kiseliev V.V.* Inverse problem for an elliptic sine-Gordon equation with an asymptotic behaviour of the cnoidal-wave type // Inverse Probl. 5 , 1989, pp. 959–982.

11. *Ting A.C., Chen H.H., Lee Y.C.* Exact solutions of a nonlinear boundary value problem: The vortices of the two-dimensional sinh-Poisson equation // Physica 26D , 1987, pp.37–66.

12. *Da-Jun Zhang , Deng-yuan Chen.* The N-Soliton Solutions of the sine-Gordon Equation with Self-Consistent Sources // Physica A 321, 2003, pp. 467–481.

13. *Khasanov A.B., Urazboev G.U.* On the sine-Gordon equation with a self-consistent source // Mat. Tr., 2008, Volume 11, Number 1, 153–166,

14. *Mel'nikov V.K.* Integration method of the Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source // Phys.Lett. A, 133, 1988, pp.493-496.

15. *Babajanov B.A., Fechkan M., Urazbaev G.U.* On the periodic Toda Lattice with self-consistent source // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2015; 22: 379-388.

16. *Oleksandr Chvartatskyi, Aristophanes Dimakis, Folkert Muller-Hoissen.* Self-Consistent Sources for Integrable Equations Via Deformations of Binary Darboux Transformations // Lett Math Phys (2016) 106:1139–1179.

УДК 517.95

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Денисов А.М.
МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия;
den@cs.msu.ru

Рассмотрим следующую задачу для функций $u(x,t)$ и $a(x,t)$

$$u_x + a_t = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$a_t = \gamma(t)(\varphi(t)u - a), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{2}$$

$$u(0,t) = \mu(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$a(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{4}$$

где $Q_T = \{(x,t): \quad 0 \le x \le l, \quad 0 \le t \le T\}$.

Задачу (1)-(4) можно рассматривать как математическую модель процесса фильтрации, в котором свойства поглощающего вещества меняются со временем.

При заданных непрерывных функциях $\varphi(t)$, $\gamma(t)$, $\mu(t)$ и $\psi(x)$ решение задачи (1)-(4) существует и единственно.

Сформулируем обратные задачи.

Обратная задача 1.

Пусть функции $\varphi(t)$, $\mu(t)$ и $\psi(x)$ заданы, а функция $\gamma(t)$ неизвестна. Требуется определить $\gamma(t)$, $u(x,t)$ и $a(x,t)$, если задана дополнительная информация об одной из компонент решения задачи (1)-(4)

$$u(l,t) = g(t), \quad 0 \le t \le T,$$

Обратная задача 2.

Пусть функции $\gamma(t)$, $\mu(t)$ и $\psi(x)$ заданы, а функция $\varphi(t)$ неизвестна. Требуется определить $\varphi(t)$, $u(x,t)$ и $a(x,t)$, если задана дополнительная информация об одной из компонент решения задачи (1)-(4)

$$u(l,t) = g(t), \quad 0 \le t \le T,$$

Обратная задача 3.

Пусть функции $\mu(t)$ и $\psi(x)$ заданы, а функции $\gamma(t)$ и $\varphi(t)$ неизвестны. Требуется определить $\gamma(t)$, $\varphi(t)$, $u(x,t)$ и $a(x,t)$, если задана дополнительная информация об одной из компонент решения задачи (1)-(4)

$$u(l,t) = g(t), \quad u_x(l,t) = p(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

Доклад посвящен доказательству существования решения сформулированных обратных задач.

УДК 517.956.6

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЧАПЛЫГИНА С НЕЛОКАЛЬНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ В ПРИЗМАТИЧЕСКОЙ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Джамалов С.З., Ашуров Р.Р., Туракулов Х.Ш.
Институт Математики АН РУз, г.Ташкент, Узбекистан;
E-mail: siroj63@mail.ru, ashurovr@gmail.com,
hamidtsh87@gmail.com

В данной статье рассматриваются вопросы корректности одной линейной обратной задачи для трехмерного уравнения Чаплыгина в призматической неограниченной области. Для этой задачи методами "ε -регуляризации" априорных оценок, последовательностью приближений с применением преоброзования Фурье доказаны теоремы существования и единственности обобщенного решения одной линейной обратной задаче с полунелокальной краевой условии в определенном классе интегрируемых функции.

Ключевые слова: трехмерная уравнения Чаплыгина,линейная обратная задача с полунелокальной краевой условии, преоброзования Фурье, методы "ε -регуляризации" априорных оценок и последовательность приближения.

ON A LINEAR INVERSE PROBLEM FOR A THREE-DIMENSIONAL CHAPLYGIN EQUATION WITH SEMI-NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS IN A PRISMATIC UNBOUNDED DOMAIN.

Dzhamalov S.Z., Ashurov R.R., Turakulov X.Sh.
Institute of Mathematics Academy of Sciences of the Republic Uzbekistan.
E-mail: siroj63@mail.ru, ashurovr@gmail.com, hamidtsh87@gmail.com

This article discusses the correctness of one linear inverse problem for the three-dimensional Chaplygin equation in a prismatic unbounded domain. For this problem, the existence and uniqueness theorems for a generalized solution to one linear inverse problem with a semi-nonlocal boundary condition in a certain class of integrals functions are proved by the methods of "ε -regularization" a priori estimates, a sequence of approximations using the Fourier transform.

Key words: three-dimensional Chaplygin equations, linear inverse problem with semi-nonlocal boundary conditions, methods of "ε -regularization" a priori estimates and successive approximations, Fourier transform.

В процессе исследования нелокальных задач была выявлена тесная взаимосвязь задач с нелокальными краевыми условиями и обратными задачами. К настоящему времени достаточно хорошо изучены обратные задачи для классических уравнений таких как, параболических, эллиптических и гиперболических типов [1, 5]. Для уравнений смешанного типа, как первого, так и второго рода в ограниченных областях изучено в работах [2 – 4, 6 – 9]. Значительно менее изученными являются обратные задачи для уравнений смешанного типа (в частности для уравнения Чаплыгина) в неограниченных областях. Частично восполнить данный пробел мы и попытаемся в рамках этой работы.

В данной работе, для исследования однозначное разрешимости обратных задач для трехмерного уравнения Чаплыгина в неограниченной призматической области предлагается метод, который основан на сведение обратной задачи к прямым полунелокальным краевым задачам для семейство нагруженных интегро-дифференциальных уравнений Чаплыгина в ограниченной области. Напомним, что нагруженным уравнением принято называть уравнение с частными производными, содержащее в коэффициентах или в правой части значения тех или иных функционалов от решения уравнения [10].

В области

$$Q = (-\alpha, \beta) \times (0, T) \times \mathbb{R} =$$

$$= Q_1 \times \mathbb{R} = \{(x, t, z); x \in (-\alpha, \beta), 0 < t < T < +\infty, z \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)\},$$

рассмотрим уравнение Чаплыгина:

$$Lu = K(x)u_{tt} - \Delta u + a(x, t)\, u_t + c(x, t)\, u = f(x, t, z), \tag{1}$$

где $xK(x) > 0$,при $x \neq 0$, $-\alpha < x < \beta$, $\Delta u = u_{xx} + u_{zz}$ - оператор Лапласа . Здесь $f(x,t,z) = g(x,t,z) + h(x,t)\psi(x,t,z)$; $g(x,t,z)$ и $\psi(x,t,z)$ -заданные функции, а функция $h(x,t)$ подлежит определению. Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в области Q.

Линейная обратная задача. Найти функции $(u(x,t,z); h(x,t))$ удовлетворяющие уравнению (1) в области Q , такие что, функция $u(x,t,z)$ удовлетворяет следующим краевым условиям

$$\gamma D_t^p\, u|_{t=0} = D_t^p\, u|_{t=T}\,, \tag{2}$$

$$u|_{x=-\alpha} = u|_{x=\beta} = 0, \tag{3}$$

при $p = 0, 1$, где $D_t^p u = \frac{\partial^p u}{\partial t^p}$, $D_t^0 u = u$, $\gamma-$ некоторое постоянное число, отличное от нуля, величина которого будет уточнена ниже,
с дополнительному условию

$$u(x, t, \ell_0) = \phi_0(x, t), \text{где} \quad \ell_0 \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

и с функций $h(x,t)$ принадлежит классу

$$U = \{\{(u, h)|\ \ u \in W_2^{2,s}(Q); h \in W_2^{2}(Q_1); s \geq 3.\}$$

Здесь через $W_2^{2,s}(Q)$, обозначено гильбертово пространство с нормой

$$\|u\|^2_{W_2^{2,s}(Q)} = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\lambda|^2)^s \cdot \|\hat{u}(x, t, \lambda)\|^2_{W_2^2(Q_1)}\, d\lambda, \tag{A}$$

где $W_2^2(Q_1)$ пространства Соболева, $3 \leq s-$ любое конечное положительное целое число, а норма в пространстве Соболева $W_2^2(Q_1)$, определяется следующим образом

$$\|\vartheta\|^2_{W_2^2(Q_1)} = \sum_{|\alpha|\leq 2} \int_{Q_1} |D^\alpha \vartheta|^2 \, dxdt,$$

$\alpha-$ это мультииндекс, $D^\alpha-$ есть обобщенная производная по переменними x и t ,а через

$$\hat{u}(x,t,\lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t,z)\, e^{-i\lambda z} dz$$

обозначено преобразование Фурье по переменым z, функции $u(x,t,z)$,

Замечание. Результат справедливо для многомерного уравнения Чаплыгина.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аниканов Ю.Е.* Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. Новосибирск. Наука, 1978. 120 с.

2. *Джамалов С.З, Пятков С.Г.* Некоторые классы обратных задач для уравнений смешанного типа второго порядка // Матем. заметки СВФУ. 2018. Т.25. № 4. С. 3–15.

3. *Джамалов С.З, Ашуров Р.Р.* Об одной линейной обратной задаче для многомерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 1. С. 34–44.

4. *Джамалов С.З, Ашуров Р.Р.* Об одной линейной обратной задаче для многомерного уравнения смешанного типа первого рода второго порядка // Известия вузов. Математика. 2019. № 6. С. 1–12.

5. *Лаврентьев М.М, Романов В.Г, Васильев В.Г.* Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск. Наука, 1969. 67 с.

6. *Сабитов К.Б., Мартемьянова Н.В.* Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа // Изв. вузов. Математика. 2011. № 2. С. 71–85.

7. *Сабитов К.Б.* Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. М: Наука, 2016. 272 с.

8. *Сидоров С.Н.* Обратные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с вырождающейся параболической частью // Сиб. электрон. матем. изв. 2019. Т. 16. С. 144–157.

9. 7. *Сидоров С.Н.* Обратные задачи для вырождающегося смешанного параболо- гиперболического уравнения по нахождению сомножителей правых частей, зависящих от времени // Уфимский математический журнал. 2019. Т. 11. ќ 1. С. 72–86.

10. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их приложения //Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 1. С. 86–94.

УДК 517.95

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СТЕПЕННЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ МНОЖИТЕЛЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ВРЕМЕНИ

Зайнуллов А.Р.

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак, Россия;

arturzayn@mail.ru

Для уравнения теплопроводности с коэффициентом теплопроводности, зависящим от времени как степенная функция, построены в явном виде решения начально-граничной задачи и доказаны теоремы единственности, существования и устойчивости решения. Основываясь на решении этой задачи изучена обратная задача по определению множителя правой части, зависящего от времени. Приведены доказательства единственности и существования решения этих обратных задач, при этом их решения построены в виде суммы рядов.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, переменные коэффициенты, начально-граничная задача, обратная задача, ряд, единственность, существование, устойчивость.

INVERSE PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION WITH POWER-LAW DEGENERACY BY DETERMINING THE TIME-DEPENDENT MULTIPLIER OF THE RIGHT-HAND SIDE

Zainullov A.R.
Sterlitamak branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia;
arturzayn@mail.ru

I proved the corresponding theorems of uniqueness, existence, and stability of solution for the heat equation with a time-dependent heat conductivity coefficients for initial-boundary value problem. And I studied the inverse problems of determining factor of the right side, depending on time. I give proofs of the uniqueness and existence of solutions to these inverse problem. The solution to the inverse problem is constructed in an explicit form.

Key words: heat conduction equation, variable coefficients, initial-boundary value problem,inverse problem, series, uniqueness, existence, stability.

Рассмотрим уравнение параболического типа

$$Lu(x,t) = t^n u_{xx} - u_t - bt^n u = F(x,t) \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t)|0 < x < l,\ 0 < t < T\}$, где коэффициент теплопроводности зависит от времени t как степенная функция t^n, $n = const > 0,\ l,\ T$ — заданные положительные числа, b — любое действительное число. Заметим, что уравнение (1) вырождается на части границы $t = 0$ области D.

Уравнения типа (1) изучались в работах Нахушева А.М. [1, с. 52 – 57], Pagani C.D.[2] и других в связи с обоснованием корректности постановки начально-граничных задач. При $n = 0$ аналогичные задачи исследованы в работе [3].

Задача 1. Найти определенную в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^1_x(\overline{D}) \cap C^{2,1}_{x,t}(D),\ u_t,\ u_{xx} \in L[0,l]; \tag{2}$$

$$Lu(x,t) = F(x,t),\ \ (x,t) \in D; \tag{3}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ t \in [0,T]; \tag{4}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \ x \in [0,l], \tag{5}$$

где $F(x,t)$ и $\varphi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, при этом $\varphi(0)=\varphi(l)=0$.

Отметим, что запись $u_t,\ u_{xx}\in L[0,l]$ означает, что эти производные суммируемы по x на $[0,l]$ при любом $t\in(0,T)$.

Задача 2. Пусть $F(x,t)=f(x)g(t)$. Требуется найти пару функций $u(x,t)$ и $g(t)$, удовлетворяющих условиям (2) – (5) и, кроме того, дополнительным условиям

$$g(t)\in C[0,T], \tag{6}$$

$$u(x_0,t)=h(t),\ 0\leqslant t\leqslant T, \tag{7}$$

где $f(x),\ \varphi(x)$ и $h(t)$ — заданные достаточно гладкие функции, x_0 — заданная точка из интервала $(0,l),\ \varphi(x_0)=h(0)$.

Решение прямой задачи 1 определяется в виде суммы ряда

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)X_k(x), \tag{8}$$

где $u_k(t)$ — находятся по формуле

$$u_k(t)=\varphi_k e^{-\lambda_k\frac{t^{n+1}}{n+1}}-\int_0^t F_k(s)e^{-\frac{\lambda_k^2}{n+1}(t^{n+1}-s^{n+1})}ds.$$

И верна следующая теорема

Теорема 1. *Если* $\varphi(x)\in C^1[0,l],\ \varphi(0)=\varphi(l)=0,\ F(x,t)\in C_{x,t}^{2+\alpha,0}(\overline{D}),\ \alpha=0$ *при* $0<n<1,\ \alpha>(n-1)(n+1)$ *при* $n\geqslant 1,\ F(0,t)=F(l,t)=0$ *при* $0\leqslant t\leqslant T$ *, то существует единственное решение задачи 1 и оно определяется формулой* (8).

Теперь на основании формулы (8) решения прямой задачи 1 изучим обратную задачу 2 по нахождению пары функций $u(x,t)$ и $g(t)$. Тогда

$$F_k(t)=g(t)f_k,$$

$$f_k=\int_0^l f(x)X_k(x)dx, \tag{9}$$

$$u_k(t)=\varphi_k e^{-\lambda_k^2 t_n}-f_k g_k(t), \tag{10}$$

где

$$g_k(t)=\int_0^t g(s)e^{-\lambda_k^2(t_n-s_n)}ds,\ s_n=\frac{s^{n+1}}{n+1}. \tag{11}$$

Теперь удовлетворим функцию (8), где $u_k(t)$ определяется по формуле (10), граничному условию (7). Тогда имеем

$$u(x_0,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)X_k(x_0)=h(t),\ 0\leqslant t\leqslant T.$$

Подставляя сюда (10), получаем интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_0^t K(t,s)g(s)ds=\widetilde{h}(t),\ 0\leqslant t\leqslant T, \tag{12}$$

с ядром

$$K(t,s)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k e^{-\lambda_k^2(t_n-s_n)}X_k(x_0),\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T, \tag{13}$$

и правой частью

$$\widetilde{h}(t)=-h(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k e^{-\lambda_k^2 t_n}X_k(x_0),\ 0\leqslant t\leqslant T. \tag{14}$$

Отметим, что ряды в правых частях равенств (13) и (14) на указанных областях равномерно сходятся и допускают почленное дифференцирование по t. В самом деле, имеем следующие оценки:

$$|K(t,s)|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}f_k e^{-\lambda_k^2(t_n-s_n)}X_k(x_0)\right|\leqslant\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}|f_k|,$$

$$\left|\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}\right|=\left|-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2 f_k t_n e^{-\lambda_k^2(t_n-s_n)}X_k(x_0)\right|\leqslant C_9\sum_{k=1}^{\infty}k^2|f_k|,$$

$$\left|\widetilde{h}(t)+h(t)\right|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k e^{-\lambda_k^2 t_n}X_k(x_0)\right|\leqslant\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k|,$$

$$\left|\widetilde{h}'(t)+h'(t)\right|=\left|-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2 t_n\varphi_k e^{-\lambda_k^2 t_n}X_k(x_0)\right|\leqslant C_{10}\sum_{k=1}^{\infty}k^2|\varphi_k|.$$

Если $f(x),\ \varphi(x)\in C^3[0,l],\ \ f(0)=f(l)=f''(0)=f''(l)=0,\ \varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)=\varphi''(l)=0,$ то в этих оценках мажорирующие ряды сходятся. В силу этого указанные ряды равномерно сходятся. Поэтому функции $K(t,s)$, $K'_t(t,s)$, $\widetilde{h}(t)$ и $\widetilde{h}'(t)$ непрерывны на указанных областях задания при условии, когда $h(t) \in C^1[0,l]$.

Продифференцировав уравнение (12) по t, получим

$$K(t,t)g(t) + \int_0^t \frac{\partial K(t,s)}{\partial t} g(s)ds = \widetilde{h}'(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{15}$$

Из равенства (13) следует, что

$$K(t,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k X_k(x_0) = f(x_0).$$

Из полученного равенства заметим что, если $f(x_0) \neq 0$, то уравнение (15) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью. Тогда по теории интегральных уравнений Вольтерра второго рода, уравнение (15) имеет единственное непрерывное на $[0,T]$ решение $g(t)$. После чего функция $u(x,t)$ определяется по формуле (8), т.к. функции $\varphi(x)$ и $F(x,t) = f(x)g(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 2.

Следовательно, нами доказано следующее утверждение

Теорема 2. *Если* $f(x)$, $\varphi(x) \in C^3[0,l]$, $f(0) = f(l) = f''(0) = f''(l) = 0$, $\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$, $h(t) \in C^1[0,l]$, $h(0) = \varphi(x_0)$, $f(x_0) \neq 0$, *то задача* (2) – (5), (6), (7) *имеет единственное решение, которое определяется рядом* (8) *с коэффициентами* (10) *и* (11), *где функция* $g(t)$ *находится из интегрального уравнения* (15).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М., Наука, 2006. 287 с.

2. *Pagani C.D.* On the parabolic equation and a related one // Ann. mat. pura ed appl. 1974. V. 99. №2. P. 333–339.

3. *Сабитов К.Б., Зайнуллов А.Р.* Обратные задачи для уравнения теплопроводности по отысканию начального условия и правой части // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2019. Т. 161. №2. С. 274–291.

УДК 517.95

ТРЕХМЕРНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ МАГНИТНОЙ ВОСПРИИМЧИВОСТИ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Колотов И.И. [1], Лукьяненко Д.В. [1], Ягола А.Г. [1], Ван Я. [2].

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова;*

[2] *Китайская академия наук; Университет Китайской академии наук, Пекин;*

kolotovigor@list.ru, lukyanenko@physics.msu.ru, yagola@physics.msu.ru, yfwang@mail.iggcas.ac.cn

В работе рассмотрены особенности решения обратной задачи восстановления магнитной восприимчивости с использованием полных тензорных градиентных данных. Данная задача сводится к решению трёхмерного интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода, которое связывает магнитную восприимчивость ограниченного тела с полным тензором градиентов компонент магнитной индукции.

Ключевые слова: магнитостатика, магнитная восприимчивость, полный тензор градиентов компонент магнитной индукции, обратная задача.

3D INVERSE PROBLEMS OF MAGNETIC SUSCEPTIBILITY RESTORATION FROM EXPERIMENTAL DATA

I.I. Kolotov [1], D.V. Lukyanenko [1], A. G. Yagola [1], Yanfei Wang [2]

[1] *Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University;*

[2] *Key Laboratory of Petroleum Resources Research Institute of Geology and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, P. R. China;*

kolotovigor@list.ru, lukyanenko@physics.msu.ru, yagola@physics.msu.ru, yfwang@mail.iggcas.ac.cn

The paper considers the features of solving the inverse problem of reconstructing the magnetic susceptibility using complete tensor gradient data. This problem is reduced to solving a three-dimensional Fredholm integral equation of the 1st kind, which connects the magnetic susceptibility of a bounded body with the total gradient tensor of the components of magnetic induction.

Key words: magnetostatics, magnetic susceptibility, total gradient tensor of magnetic induction components, inverse problem.

В последние годы большое внимание привлекает способ восстановления магнитных параметров с помощью измерений тензора градиентов компонент магнитной индукции. Традиционный подход к восстановлению магнитных параметров основан на данных полной напряженности магнитного поля и решении соответствующей математической задачи. В последние годы, с развитием передовых технологий, становится доступным получение полных данных тензора градиентов. В работе [1] решена задача восстановления параметров намагниченности. В этой задаче три скалярные функции (компоненты вектора намагниченности) были восстановлены с использованием данных пяти скалярных функций (независимых компонентов магнитного тензора). В нашей работе [2] мы рассматриваем задачу восстановления магнитной восприимчивости с помощью измерения тензора градиентов компонент магнитной индукции. В этой работе мы восстановили одну скалярную функцию (магнитную восприимчивость), используя пять скалярных функций (компоненты магнитного тензора). Поскольку мы имеем дело с физически переопределенной задачей, мы ожидаем получить лучшие результаты, чем если бы она была просто физически определенной. В настоящий момент мы предоставили тестовые расчеты с использованием смоделированных данных. Сейчас мы тестируем наш подход на реальных данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Y. Wang, D. Lukyanenko, A. Yagola.* Magnetic parameters inversion method with full tensor gradient data // Inverse Problem and Imaging. 2019. Vol. 13, no. 4. P. 745-754.

2. *Y. Wang, I. Kolotov, D. Lukyanenko, A. Yagola.* Reconstruction of Magnetic Susceptibility Using Full Magnetic Gradient Data June 2020 Computational Mathematics and Mathematical Physics 60(6):1000-1007 DOI: 10.1134/S096554252006010X

УДК 517.95

ON AN INVERSE SCATTERING PROBLEM FOR A DISCONTINUOUS STURM-LIOUVILLE EQUATION

Mamedov Kh.R., Demirbilek U.
Mersin University, Mersin, Turkey;
hanlar@mersin.edu.tr, udemirbilek@mersin.edu.tr

1.INTRODUCTION

In this paper, we consider the discontinuos differential equation on the half line $[0, \infty)$

$$-u'' + q(x)u = \lambda^2 r(x)u, \tag{1.1}$$

and the boundary condition

$$u'(0) + (\alpha_0 + i\alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)u(0) = 0, \tag{1.2}$$

where $q(x)$ is a real valued function satisfying the condition

$$\int_0^\infty (1+x)\,|q(x)|\,dx < \infty,$$

and $r(x)$ is a real positive piecewise continuous function

$$r(x) = \begin{cases} \alpha^2, & 0 \le x < b, \\ 1, & b \le x < \infty, \end{cases}$$

Here $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ are real numbers such that $\alpha_j \ge 0 \quad (j = 1, 2)$ and λ is a spectral parameter.

By using the integral representation of the solution $f(x, \lambda)$ of the equation (1.1) the inverse problem of the scattering theory is considered. The scattering data of the boundary value problem (1.1)-(1.2) is defined, some properties of the the scattering data are investigated. Marchenko type main equation is obtained for solving the inverse scattering problem, and utilizing this, the characteristic properties of the scattering data are investigated.Thus, the uniqueness of the solution of the the inverse problem for the boundary value problem (1.1)-(1.2) is shown.

In the case of $r(x) \equiv 1$, the uniqueness of the inverse problem is shown in $[3, 6]$ for the boundary value problem (1.1)-(1.2). On the other hand, when $r(x) \neq 1$, spectral analysis involving linear dependence on the spectral parameter in the boundary condition is studied in $[4, 7]$. In the case $q(x) \equiv 0$, this boundary value problem is given by application to the heat transmission problem in $[5]$.

It is known $[4]$ that for all λ from the closed upper half plane equation (1.1) has a unique solution $f(x, \lambda)$ which satisfies the condition

$$\lim_{x\to\infty} f(x, \lambda)e^{-i\lambda x} = 1,$$

and that can be represented in the form

$$f(x, \lambda) = f_0(x, \lambda) + \int_{\mu^+(x)}^{\infty} K(x, t)e^{i\lambda t}dt, \tag{1.3}$$

where

$$f_0(x, \lambda) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\alpha})e^{i\lambda\mu^+(x)} + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\alpha})e^{i\lambda\mu^-(x)}$$

is the Jost solution of equation (1.1) when $q(x) \equiv 0$ and

$$\mu^{\pm}(x) = \pm x\sqrt{r(x)} + b(1 \mp \sqrt{r(x)}).$$

The kernel $K(x, t) \in L_1(\mu^+(x), \infty)$ has the properties below:

$$\frac{d}{dx}K(x, \mu^+(x)) = -\frac{1}{4\sqrt{r(x)}}(1 + \frac{1}{\sqrt{r(x)}})q(x), \tag{1.4}$$

$$\frac{d}{dx}\left[K(x, \mu^-(x) + 0) - K(x, \mu^-(x) - 0)\right] = \frac{1}{4\sqrt{r(x)}}(1 - \frac{1}{\sqrt{r(x)}})q(x). \tag{1.5}$$

Let us assume that $\varphi(x, \lambda)$ be a solution of equation (1.1) satisfying the initial conditions

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = -\left(\alpha_0 + i\alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2\right).$$

For real number $\lambda \neq 0$, the function $f(x, \lambda)$, $\overline{f(x, \lambda)}$ form a fundamental system of equation (1) and the Wronskian of this system is equal to $2i\lambda$:

$$W\left\{f(x,\lambda),\overline{f(x,\lambda)}\right\} = f'(x,\lambda)\overline{f(x,\lambda)} - f(x,\lambda)\overline{f'(x,\lambda)} = 2i\lambda.$$

2. SCATTERING DATA

Similar to [3] , it shown that using the properties of the above solutions :

Theorem 1. The identity

$$\frac{2i\lambda\varphi(x,\lambda)}{f'(0,\lambda)+(\alpha_0+i\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2)f(0,\lambda)} = \overline{f(x,\lambda)} - S(\lambda)f(x,\lambda),$$

holds for all real $\lambda \neq 0$, where

$$S(\lambda) = \frac{\overline{f'(0,\lambda)}+(\alpha_0+i\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2)\overline{f(0,\lambda)}}{f'(0,\lambda)+(\alpha_0+i\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2)f(0,\lambda)}, \tag{2.1}$$

and

$$S(\lambda) = \overline{S(-\lambda)}.$$

Let be $E(\lambda) = f'(0,\lambda)+(\alpha_0+i\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2)f(0,\lambda)$.

The function $S(\lambda)$ defined by the formula (2.1) is called the scattering function of the boundary value problem (1.1)-(1.2).

Lemma 1. The function $E(\lambda)$ may has only a finite number of zeros $\lambda_k (k = 1, 2, ..., n)$ in the half- plane $(Im\lambda > 0)$, they are all simple and lie on the imaginary axis.

The numbers $m_k^{-2} = \int\limits_0^\infty \rho(x)\left|f(x,i\lambda_k)\right|^2 dx + \frac{\alpha_1+2\alpha_2\lambda_k}{2\lambda_k}\left|f(0,i\lambda_k)\right|^2$ $(k = 1, 2, ..., n)$ are defined as norming numbers for the boundary value problem $(1)-(2)$.

It turns out that the potential $q(x)$ in the equation (1) is uniquely determined by the set of values $\{S(\lambda), \lambda_k, m_k \quad (k = 1, 2, .., n)\}$. The set of values is called the scattering data of the boundary value problem (1.1)-(1.2). The classical case the inverse problem of scattering theory was completely solved in $[1, 2]$.

3. INVERSE PROBLEM

We can write out the integral equation

$$F(x,y)+\int_{\mu^+(x)}^{\infty}K(x,t)F_0(t+y)dt+ \tag{3.1}$$
$$+K(x,y)+\frac{1-\sqrt{r(x)}}{1+\sqrt{r(x)}}K(x,2b-y)=0,$$

for the unknown function $K(x,t)$.

The integral equation is called the main equation of the inverse problem of scattering theory for the boundary value problem (1.1)-(1.2). The main equation (3.1) is different from the classic equation of Marchenko and we call the equation the modified Marchenko equation. The discontinuity of the function $r(x)$ strongly influences the structure of the main equation (3.1).

$$F(x,y)=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sqrt{r(x)}})F_0(y+\mu^+(x))+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{\sqrt{r(x)}})F_0(y+\mu^-(x)), \tag{3.2}$$

$$F_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[S_0-S(\lambda)\right]e^{-i\lambda x}+\sum_{k=1}^{n}m_k^2e^{-\lambda_k x}, \tag{3.3}$$

where

$$S_0(\lambda)=-e^{-2i\lambda b}\frac{1+\tau e e^{-2i\lambda\alpha b}}{e^{-2i\lambda\alpha b}-\tau},\quad \tau=\frac{\alpha-1}{\alpha+1}.$$

Theorem 2. The main equation (3.1) has a unique solution $K(x,.)\in L_1\left(\mu^+(x),\infty\right)$ for each fixed $x\geq 0$.

To form the main equation (3.1), it sufficies to know the functions $F_0(x)$ and $F(x,y)$. In turn, to find the function $F_0(x)$, $F(x,y)$; it sufficies to know the scattering data $\{S(\lambda),\lambda_k,m_k,(k=1,2,...,n)\}$. Given the scattering data, we can use formulas (3.2),(3.3) to construct the functions $F_0(x)$, $F(x,y)$ and write out the main equation (3.1) for the unknown function $K(x,y)$. According the Theorem 2, the main equation has a unique solution. Solving this equation, we find the kernel $K(x,y)$ of the special solution (1.3) and hence, according to formulas (1.4),(1.5), it is constructed the potential $q(x)$.

Corollary. The scattering data uniquely determine the potential $q(x)$.

Key words: Sturm-Liouville operator, scattering data, inverse problem.

REFERENCES

1. *Marchenko V.A.* Sturm-Liouville Operators and Their Applications, // Operator Theory: Advances and Applications, 22. Birkhauser Verlag: Basel 1986 с.

2. *Levitan B.M.* On the solution of the inverse problem of quantum scattering theory. // Mat. Zametki. 1975. Vol.17,№ 4,С. 611–624.

3. *Mamedov Kh.R.* Uniqueness of the solution of the inverse problem of scattering theory for the Sturm-Liouville operator with a spectral parameter in the boundary condition // Math. Notes. 2003. Vol. 74, № 1-2, С. 136–140.

4. *Mamedov Kh.R.* Eigenparameter dependent inverse boundary value problem for a class of Sturm-Liouville operator // Boundary Value Problems, 2014, Article ID: 194.

5. *Cohen D.S.* An Integral Transform Associated with Boundary Conditions Containing an Eigenvalue Parameter // SIAM J. Appl. Math. 1966. Vol. 14, № 5, С. 1164–75.

6. *Yang Y., Wei G.* Inverse scattering problems for Sturm-Liouville operators with spectral parameter dependent on the boundary conditions // Math.Notes. 2018. Vol. 103, № 1, С. 65–74.

7. *Mizrak O. Mamedov Kh. R. Akhtyamov A.* Characteristic Properties of Scattering Data of a Boundary Value Problem.// Filomat. 2017, № 31, С.3945–3951.

УДК 517.927

КОРРЕКТНЫЕ СУЖЕНИЯ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ПЕРВОГО ПОРЯДКА, СВЯЗАННОГО С ОБРАТНЫМИ ЗАДАЧАМИ ПО ВОССТАНОВЛЕНИЮ ИСТОЧНИКА

Садыбеков М.А.
Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Казахстан;
sadybekov@math.kz

Методом теории корректных сужений операторов описаны все-возможные корректные постановки начально-краевых условий для

обратных задач, то есть для задач по восстановлению источника (правой части уравнения) одновременно с нахождением решения уравнения. Такие обратные задачи могут быть представлены в виде решения одного линейного операторного уравнения. Для операторов такого вида может быть применена теория корректных сужений линейных операторов. Преимуществом теории корректных сужений является то, что эта теория может дать полное описание всех корректных сужений. На языке краевых задач это означает, что может быть дано описание всех краевых условий, или всех условий переопределения, при которых обратная задача является однозначно разрешимой.

Ключевые слова: корректные сужения , корректные расширения , нелокальные краевые задачи , корректные краевые задачи , обратные спектральные задачи , обратные задачи для эволюционных уравнений.

ON THE UNIQUENESS OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A LOADED DIFFERENTIAL EQUATION OF THE FOURTH ORDER WITH A SINGULAR COEFFICIENT

Sadybekov M.A.
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan;
sadybekov@math.kz

Using the method of the theory of correct restrictions of operators, we will describe all possible correct formulations of initial-boundary conditions for inverse problems, that is, for problems of recovering source, simultaneously with finding a solution of the equation. Such inverse problems can be represented as a solution of one linear operator equation. The theory of correct restrictions can be applied to operators of this type. In the language of boundary value problems, this means that one can give the description of all boundary conditions or all overdetermination conditions under which the inverse problem is uniquely solvable.

Key words: correct restrictions , correct extensions , nonlocal boundary value problems , correct boundary value problems , inverse spectral problems , inverse problems for evolution equations.

УДК 517.95

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ЧАСТЬЮ

Сидоров С.Н.
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак, Россия;
Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований Республики Башкортостан, г. Стерлитамак, Россия;
stsid@mail.ru

Для трехмерного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с вырождающейся гиперболической частью в прямоугольном параллелепипеде рассмотрены прямая и обратные задачи по определению сомножителей правых частей, зависящих от времени.

Ключевые слова: уравнение смешанного параболо-гиперболического типа, начально-граничная задача, обратные задачи, единственность, ряд, малые знаменатели, существование, интегральные уравнения.

INVERSE PROBLEMS FOR A THREE-DIMENSIONAL EQUATION OF PARABOLO-HYPERBOLIC TYPE WITH A DEGENERATING HYPERBOLIC PART

Sidorov S.N.
Sterlitamak branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia;
Sterlitamak Branch of the Institute for Strategic Studies of the Republic of Bashkortostan, Sterlitamak, Russia;
stsid@mail.ru

For a three-dimensional equation of a mixed parabolic-hyperbolic type with a degenerating hyperbolic part in a rectangular parallelepiped, the direct and inverse problems of determining the factors of the right-hand sides, depending on time, are considered.

Key words: equation of mixed parabolic-hyperbolic type, initial-boundary value problem, inverse problems, uniqueness, series, small denominators, existence, integral equations.

Рассмотрим уравнение смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = F(x, y, t), \tag{1}$$

здесь

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} - u_{yy} + bu, & t > 0, \\ u_{tt} - (-t)^m(u_{xx} + u_{yy}) - b(-t)^m u, & t < 0, \end{cases}$$

$$F(x, y, t) = \begin{cases} f_1(x, y)g_1(t), & t > 0, \\ f_2(x, y)g_2(t), & t < 0, \end{cases}$$

в области $Q = \{(x, y, t) |\, (x, y) \in D,\, t \in (-\alpha, \beta)\}$, $D = \{(x, y) |\, 0 < x < p,\, 0 < y < q\}$, α, β, p, q, m – заданные положительные действительные числа, b – заданное любое действительное число, и поставим следующие задачи.

Задача 1. *Найти функцию* $u(x, y, t)$, *определенной в области* Q *и удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x, y, t) \in C(\overline{Q}) \cap C_t^1(Q) \cap C_{xy}^1(\overline{Q}) \cap C_{xy}^2(Q_+) \cap C^2(Q_-);$$

$$Lu(x, y, t) \equiv F(x, y, t), \quad (x, y, t) \in Q_+ \cup Q_-;$$

$$u(x, y, t)\big|_{x=0} = u(x, y, t)\big|_{x=p} = 0, \quad -\alpha \le t \le \beta;$$

$$u(x, y, t)\big|_{y=0} = u(x, y, t)\big|_{y=q} = 0, \quad -\alpha \le t \le \beta;$$

$$u(x, y, t)\big|_{t=-\alpha} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D},$$

где $F(x, y, t)$ *и* $\psi(x, y)$ *– заданные достаточно гладкие функции,* $Q_- = Q \cap \{t < 0\}$, $Q_+ = Q \cap \{t > 0\}$.

Задача 2. *Найти функции* $u(x, y, t)$ *и* $g_1(t)$, *удовлетворяющие условиям задачи 1 и*

$$g_1(t) \in C[0, \beta];$$

$$u(x_0, y_0, t) = h_1(t), \quad (x_0, y_0) \in D, \quad 0 \le t \le \beta,$$

где $f_i(x, y)$, $i = 1, 2$, $g_2(t)$ *и* $h_1(t)$ *– заданные функции.*

Задача 3. *Найти функции* $u(x, y, t)$ *и* $g_2(t)$, *удовлетворяющие условиям задачи 1 и*

$$g_2(t) \in C[-\alpha, 0];$$

$$u(x_0, y_0, t) = h_2(t), \quad (x_0, y_0) \in D, \quad -\alpha \le t \le 0,$$

где $f_i(x, y)$, $i = 1, 2$, $g_1(t)$ *и* $h_2(t)$ *– заданные функции.*

Задача 4. *Найти функции* $u(x, y, t)$, $g_1(t)$ *и* $g_2(t)$, *удовлетворяющие условиям задач 1 – 3.*

Отметим, что в статьях [1, 2] рассмотрены задачи 1 – 4 для двух классов неоднородных двумерных вырождающихся уравнений смешанного параболо-гиперболического типа: для уравнения смешанного типа с вырождающейся гиперболической частью и для уравнения смешанного типа с вырождающейся параболической частью. В работах [3, 4] для уравнения (1) без вырождающейся гиперболической части, т.е. при $m = 0$, изучены задача 1 и обратная задача по отысканию сомножителей правой части $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$, зависящих от пространственных координат.

Здесь для неоднородного трехмерного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в области Q изучена прямая начально-граничная задача 1 и обратные задачи 2 – 4 по отысканию сомножителей сомножителей правых частей, зависящих от времени, т.е. $g_i(t)$, $i = 1, 2$. Решение прямой задачи построено в виде суммы ортогонального ряда. При обосновании сходимости ряда возникла проблема малых знаменателей от двух натуральных аргументов. Установлены оценки об отделенности от нуля малых знаменателей с соответствующей асимптотикой. Эти оценки позволили обосновать сходимость построенного ряда в классе регулярных решений данного уравнения. На основе решения прямой задачи поставлены и изучены три обратные задачи по отысканию сомножителя правой части, зависящей от времени, только из параболической или гиперболической части уравнения, и когда неизвестными одновременно являются сомножители из обеих частей уравнения. Используя формулу решения прямой начально-граничной задачи, решение обратных задач эквивалентно редуцировано к разрешимости нагруженных интегральных уравнений. На основании теории интегральных уравнений доказаны соответствующие теоремы единственности и существования решений поставленных обратных задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-31-60016).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сидоров С. Н.* Обратные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с вырождающейся параболической частью // Сиб. электрон. матем. изв. 2019. Т. 16. С. 144–157.

2. *Сидоров С. Н.* Обратные задачи для вырождающегося смешанного параболо-гиперболического уравнения по нахождению сомножителей правых частей, зависящих от времени // Уфимский математический журнал. 2019. Т. 11. № 1. С. 72–86.

3. *Sabitov K. B., Sidorov S. N.* Initial-Boundary Problem for a Three-Dimensional Inhomogeneous Equation of Parabolic-Hyperbolic Type // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41. № 11. P. 2257–2268.

4. *Sidorov S. N.* An Inverse Problem for an Equation of Parabolic-Hyperbolic Type to Find the Factors of the Right-Hand Side Depending on the Spatial Coordinates // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42. № 6. P. 1431–1444.

УДК 517.957

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ КДФ С ИСТОЧНИКОМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА В КЛАССЕ БЫСТРОУБЫВАЮЩИХ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Хоитметов У.А.

Хорезмское отделение института математики им. Романовского, г. Ургенч, Узбекистан;

x_umid@mail.ru

В этой работе метод обратной задачи рассеяния применяется к интегрированию нагруженного уравнения Кортевега-де Фриза с источником интегрального типа в классе быстроубывающих комплекснозначных функций.

Ключевые слова: нагруженное уравнение Кортевега-де Фриза, оператор Штурма-Лиувилля, решения Йоста, данные рассеяния, обратная задача теории рассеяния.

ON INTEGRATION OF A LOADED KDV EQUATION WITH AN INTEGRAL TYPE SOURCE IN THE CLASS OF RAPIDLY DECREASING COMPLEX-VALUED FUNCTIONS

Hoitmetov U.A.
Khorezm Branch of the Institute of Mathematics named after Romanovsky, Urgench, Uzbekistan;
x_umid@mail.ru

In this work, the inverse scattering method is applied to the integration of the loaded Korteweg-de Vries equation with an integral-type source in the class of rapidly decreasing complex-valued functions.

Key words: loaded Korteweg-de Vries equation, Sturm-Liouville operator, Jost solutions, scattering data, inverse scattering problem.

В данной работе рассматривается система нелинейных нагруженных уравнений вида

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} + \gamma(t)u(0,t)u_x = 2\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,\eta,t)\varphi(x,-\eta,t)\,d\eta, \quad (1)$$

$$L(t)\varphi = \eta^2\varphi, \quad (2)$$

где $u = u(x,t)$, $L(t) = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x,t)$ и $\gamma(t)$ – заданная непрерывная функция. Система нелинейных уравнений (1)-(2) рассматривается при начальном условии

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

где начальная функция $u_0(x)$ является комплекснозначной и обладает следующими свойствами:

1) для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_0(x)|\, e^{\varepsilon|x|}\, dx < \infty; \quad (4)$$

2) оператор $L(0)$ имеет ровно N комплексных собственных значений $\lambda_1(0), \lambda_2(0), \ldots, \lambda_N(0)$ с кратностями $m_1(0), m_2(0), \ldots, m_N(0)$ и не имеет спектральных особенностей.

В рассматриваемой задаче функция $\varphi(x,\eta,t)$ решение уравнения (2) определяемое асимптотикой

$$\varphi(x,\eta,t) = h(\eta,t)e^{-i\eta x} + o(1), \quad \text{при} \quad x \to \infty, \quad (5)$$

где $h(\eta, t)$ – изначально заданная непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\eta, t)h(-\eta, t)\, d\eta < \infty \tag{6}$$

при всех неотрицательных значениях t.

Пусть функция $u(x,t)$ обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \to \pm\infty$, т.ч.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\left| \frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j} \right| e^{\varepsilon|x|} \right) dx < \infty, \quad j = 0, 1, 2, 3\,. \tag{7}$$

Основная цель данной работы – получить представления для решения $u(x,t)$, $\varphi(x,\eta,t)$ задачи (1)-(7) в рамках метода обратной задачи рассеяния для несамосопряженного оператора $L(t)$.

Рассмотрим уравнение

$$L(0)y := -y'' + u_0(x)y = k^2 y, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

где потенциал $u_0(x)$ предполагается комплекснозначной и удовлетворяет условию (4). Обозначим через $e_+(x,k)$ и $e_-(x,k)$ решения уравнения (8) с условиями на бесконечности при $\operatorname{Im} k > -\dfrac{\varepsilon}{2}$:

$$e_+(x,k) = e^{ikx} + o(1),\ x \to \infty; \quad e_-(x,k) = e^{-ikx} + o(1),\ x \to -\infty. \tag{9}$$

Эти решения называются решениями Йоста и для них справедливы следующие представления

$$e_\pm(x,\, k) = e^{\pm ikx} \pm \int_x^{\pm\infty} K_\pm(x,\, y) e^{\pm iky}\, dy. \tag{10}$$

Эти решения, при выполнении условии (4) существуют, единственны и голоморфны по k в полуплоскости $\operatorname{Im} k > -\dfrac{\varepsilon}{2}$. Кроме того, ядра $K_\pm(x,\, y)$ связаны с потенциалом $u_0(x)$ следующим образом:

$$u_0(x) = \mp 2 \frac{dK_\pm(x,x)}{dx}. \tag{11}$$

Обозначим через $\omega(k)$ и $v(k)$ вронскианы

$$\omega(k) := e_-(x,k)e_+'(x,k) - e_-'(x,k)e_+(x,k),$$

$$v(k) := e_+(x, -k)e'_-(x, k) - e_-(x, k)e'_+(x, -k).$$

Существуют так называемые нормировочные цепочки чисел $\{\chi_0^j, \chi_1^j, \ldots, \chi_{m_j-1}^j\}$ такие, что имеют место соотношения

$$\frac{1}{s!}\left(\left(\frac{d}{dk}\right)^s e_-(x,\, k)\right)_{k=k_j} = \sum_{\nu=0}^{s} \chi_{s-\nu}^j \frac{1}{\nu!}\left(\left(\frac{d}{dk}\right)^\nu e_+(x,\, k)\right)_{k=k_j},$$
$$s = \overline{0,\, m_j - 1}, \quad j = \overline{1,\, N},$$

при этом $\chi_0^j \neq 0$.

Известно (см. [1], [2]), что ядро $K_+(x,\, y)$ оператора преобразования (10) удовлетворяет интегральному уравнению Гельфанда-Левитана-Марченко

$$K_+(x,\, y) + F_+(x+y) + \int_x^\infty K_+(x,\, s)F_+(s+y)\, ds = 0, \quad x \le y,$$

где $S(k) := \dfrac{v(k)}{\omega(k)}$,

$$F_+(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(k)e^{ikx}\, dk + \sum_{j=1}^{N}\sum_{\nu=0}^{m_j-1} \chi_{m_j-\nu-1}^j \frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{dk^\nu}\left(\frac{2k(k-k_j)^{m_j}}{w(k)}e^{ikx}\right),$$

при этом потенциал $u_0(x)$ находится по формуле (11).

Определение. Набор $\left\{S(k),\, \lambda_j,\, \chi_0^j,\, \ldots,\, \chi_{m_j-1}^j,\, j = \overline{1, N}\right\}$ называется *данными рассеяния* для оператора $L(0)$.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема. Если функции $u(x,t)$, $\varphi(x,\eta,t)$ являются решением задачи (1)-(6) в классе функций (7), то данные рассеяния оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x,t)$ меняются по t следующим образом

$$\frac{dS(k,t)}{dt} = \Bigg(8ik^3 - 2\pi h(k,t)h(-k,t)$$
$$+2i\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\eta,t)h(-\eta,t)}{k+\eta}d\eta - 2ik\gamma(t)u(0,t)\Bigg)S(k,t),$$

$$m_n(t) = m_n(0), \qquad \frac{d\lambda_n}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\chi_0^n}{dt} = \left(8ik_n^3 + 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\eta,t)h(-\eta,t)}{i(k_n+\eta)(1-S(\eta)S(-\eta))}\,d\eta - 2ik_n\gamma(t)u(0,t)\right)\chi_0^n\,,$$

$$\frac{d\chi_1^n}{dt} = \left(8ik_n^3 + 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\eta,t)h(-\eta,t)}{i(k_n+\eta)(1-S(\eta)S(-\eta))}\,d\eta - 2ik_n\gamma(t)u(0,t)\right)\chi_1^n$$

$$+\left(24ik_n^2 - 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\eta,t)h(-\eta,t)}{i(k_n+\eta)^2(1-S(\eta)S(-\eta))}\,d\eta - 2i\gamma(t)u(0,t)\right)\chi_0^n,$$

$$\frac{d\chi_2^n}{dt} = \left(8ik_n^3 + 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\eta,t)h(-\eta,t)}{i(k_n+\eta)(1-S(\eta)S(-\eta))}\,d\eta - 2ik_n\gamma(t)u(0,t)\right)\chi_2^n$$

$$+\left(24ik_n^2 - 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\eta,t)h(-\eta,t)}{i(k_n+\eta)^2(1-S(\eta)S(-\eta))}\,d\eta - 2i\gamma(t)u(0,t)\right)\chi_1^n$$

$$+\left(24ik_n + 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\eta,t)h(-\eta,t)}{i(k_n+\eta)^3(1-S(\eta)S(-\eta))}\,d\eta\right)\chi_0^n,$$

$$\frac{d\chi_3^n}{dt} = \left(8ik_n^3 + 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\eta,t)h(-\eta,t)}{i(k_n+\eta)(1-S(\eta)S(-\eta))}\,d\eta - 2ik_n\gamma(t)u(0,t)\right)\chi_3^n$$

$$+\left(24ik_n^2 - 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\eta,t)h(-\eta,t)}{i(k_n+\eta)^2(1-S(\eta)S(-\eta))}\,d\eta - 2i\gamma(t)u(0,t)\right)\chi_2^n$$

$$+\left(24ik_n + 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\eta,t)h(-\eta,t)}{i(k_n+\eta)^3(1-S(\eta)S(-\eta))}\,d\eta\right)\chi_1^n$$

$$+\left(8i - 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\eta,t)h(-\eta,t)}{i(k_n+\eta)^4(1-S(\eta)S(-\eta))}\,d\eta\right)\chi_0^n,$$

$$\frac{d\chi_p^n}{dt} = \left(8ik_n^3 + 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\eta,t)h(-\eta,t)}{i(k_n+\eta)(1-S(\eta)S(-\eta))}\,d\eta - 2ik_n\gamma(t)u(0,t)\right)\chi_p^n$$

$$+\left(24ik_n^2 - 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\eta,t)h(-\eta,t)}{i(k_n+\eta)^2(1-S(\eta)S(-\eta))}\,d\eta - 2ik_n\gamma(t)u(0,t)\right)\chi_{p-1}^n$$

$$+\left(24ik_n + 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\eta,t)h(-\eta,t)}{i(k_n+\eta)^3(1-S(\eta)S(-\eta))}\,d\eta\right)\chi_{p-2}^n$$

$$+\left(8i - 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\eta,t)h(-\eta,t)}{i(k_n+\eta)^4(1-S(\eta)S(-\eta))}\,d\eta\right)\chi_{p-3}^n$$

$$+2\sum_{q=0}^{p-4}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{p-q}h(\eta,t)h(-\eta,t)}{i(k_n+\eta)^{p-q+1}(1-S(\eta)S(-\eta))}\,d\eta\right)\chi_q^n,$$

$$n=\overline{1,N},\ p=\overline{4,m_n-1}.$$

Полученные равенства полностью определяют эволюцию данных рассеяния, что позволяет применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи (1)-(7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блащак В. А.* Аналог обратной задачи теории рассеяния для несамосопряженного оператора. I// *Дифференциальные уравнения.* 1968, Т. 4, №8, С.1519–1533.

2. *Нахушев А. М. Уравнения математической биологии.* М. Высшая школа, 1995.

3. *Хасанов А. Б., Хоитметов У. А.* Об интегрировании уравнения Кортевега–де Фриза в классе быстроубывающих комплекснозначных функций// *Изв. вузов. Матем.* 2018, №3, С.79–90.

4. *Gardner C. S., Greene I. M., Kruskal M. D., Miura R. M.* Method for Solving the Korteweg-de Vries Equation// *Phys. Rev. Lett.* 1967, №19, P.1095–1097.

5. *Leon J., Latifi A.* Solution of an initial-boundary value problem for coupled nonlinear waves // *J.Phys. A: Math.Gen.* 1990, v. 23, P.1385–1403.

УДК 517.95

ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КЕЛДЫША ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Абашкин А.А.
Самарский Государственный Технический Университет, г. Самара, Россия;
samcocaa@rambler.ru

Для уравнения смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями сингулярности рассмотрена задача Келдыша в прямоугольной области. С помощью спектрального метода доказана теорема единственности решения. Найдены некоторые условия существования решения поставленной задачи.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, единственность, существование, малые знаменатели, мера иррациональности.

UNIQUE SOLVABILITY OF KELDYSH PROBLEM FOR MIXED TYPE EQUATION WITH TWO SINGULAR COEFFICIENTS

Abashkin A.A.
Samara State Technical University, Samara, Russia;
samcocaa@rambler.ru

We consider the Keldysh problem in rectangular domain for mixed type equation with two singular rectangle singular lines. We prove uniqueness theorem with the use of spectral method. We find some conditions of problem solution existence.

Key words: mixed type equation, uniqueness, existence, small denominators, irrationality measure.

Рассмотрено уравнение смешанного типа

$$Lu = u_{xx} + (sign\, y)u_{yy} + \frac{2\mu}{x}u_x + \frac{2p}{|y|}u_y - k^2u = 0, \qquad (1)$$

где μ, p, k – произвольные заданные вещественные числа, такие, что $|p| < 1/2$, $\mu \geq 1/2$, $k > 0$.

Задача E (задача Келдыша). В прямоугольнике $D = \{(x,y) \mid 0 < x < a \quad -\alpha < y < \beta\}$, где $\alpha, \beta > 0$, найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D} \setminus \{y=0\}) \cap C^2(D^+ \cup D^-), \tag{2}$$

$$Lu = 0, \quad (x,y) \in D^+ \cup D^-; \tag{3}$$

$$\lim_{y \to 0+} y^{2p} u_y(x,y) = \lim_{y \to 0-} (-y)^{2p} u_y(x,y), \quad 0 \leq x \leq a; \tag{4}$$

$$u(a,y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta; \tag{5}$$

$$u(x,-\alpha) = \varphi(x), \quad u(x,\beta) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq a, \tag{6}$$

где $\varphi(x), \psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, такие, что $\varphi(a) = \psi(a) = 0$, $D^+ = D \cap \{y > 0\}$, $D^- = D \cap \{y < 0\}$.

С помощью спектрального метода, основываясь на работах [1] – [3], доказана теорема единственности решения.

Теорема 1. *Если решение задачи E существует, то оно единственно тогда и только тогда, когда для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнены условия*

$$\Delta_n(\alpha,\beta) = \beta^{-p_1} \alpha^{-p_1} \left[K_{p_1}(\sigma_n \beta) J_{p_1}(\sigma_n \alpha) + I_{p_1}(\sigma_n \beta) \overline{Y}_{p_1}(\sigma_n \alpha) \right] \neq 0, \tag{7}$$

где $J_\nu(z)$ – функция Бесселя, $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ – модифицированные функции Бесселя, $a\sigma_n = \sqrt{r_n^2 + (ak)^2}$, r_n – положительные нули функции $J_{\mu_1}(z)$, пронумерованные в порядке возрастания, $\mu_1 = \mu - 1/2$, $p_1 = p - 1/2$.

Решение построено в виде ряда,

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) T_n x^{-\mu_1} J_{\mu_1}\left(\frac{x r_n}{a}\right), \tag{8}$$

$$u_n(y) = \begin{cases} \varphi_n A_n(y) + \psi_n B_n(y), & y \geq 0, \\ \varphi_n C_n(y) + \psi_n D_n(y), & y \leq 0, \end{cases} \tag{9}$$

$$A_n(y) = \frac{\beta^{-p_1} y^{-p_1}}{\Delta_n(\alpha,\beta)} \left[K_{p_1}(\sigma_n\beta) I_{p_1}(\sigma_n y) - I_{p_1}(\sigma_n\beta) K_{p_1}(\sigma_n y) \right], \qquad (10)$$

$$B_n(y) = \frac{\alpha^{-p_1} y^{-p_1}}{\Delta_n(\alpha,\beta)} \left[\overline{Y}_{p_1}(\sigma_n\alpha) I_{p_1}(\sigma_n y) + J_{p_1}(\sigma_n\alpha) K_{p_1}(\sigma_n y) \right], \qquad (11)$$

$$C_n(y) = \frac{\beta^{-p_1} y^{-p_1}}{\Delta_n(\alpha,\beta)} \left[K_{p_1}(\sigma_n\beta) J_{p_1}(-\sigma_n y) + I_{p_1}(\sigma_n\beta) \overline{Y}_{p_1}(-\sigma_n y) \right], \quad (12)$$

$$D_n(y) = \frac{\alpha^{-p_1} y^{-p_1}}{\Delta_n(\alpha,\beta)} \left[\overline{Y}_{p_1}(\sigma_n\alpha) J_{p_1}(-\sigma_n y) - J_{p_1}(\sigma_n\alpha) \overline{Y}_{p_1}(-\sigma_n y) \right]. \quad (13)$$

при обосновании сходимости которого возникает проблема малых знаменателей. Данная проблема состоит в том, что нужно оценить отделимость от нуля выражения

$$\gamma_n(\alpha,\beta) = J_{p_1}(\sigma_n\alpha) \frac{K_{p_1}(\sigma_n\beta)}{I_{p_1}(\sigma_n\beta)} + \frac{\pi}{2\sin(\pi p_1)} \overline{\gamma_n}(\widetilde{\alpha}),$$

$$\overline{\gamma_n}(\widetilde{\alpha}) = J_{p_1}(\widetilde{\alpha} r_n \widetilde{r_n}) + J_{-p_1}(\widetilde{\alpha} r_n \widetilde{r_n}),$$

$$\sigma_n\alpha = \widetilde{\alpha} r_n \widetilde{r_n}, \quad \widetilde{r_n} = \sqrt{1 + \left(\frac{ak}{r_n}\right)^2}, \quad \widetilde{\alpha} = \frac{\alpha}{a}.$$

входящего в знаменатель коэффициентов (10) – (13)

$$\Delta_n(\alpha,\beta) = -\beta^{-p_1} \alpha^{-p_1} I_{p_1}(\sigma_n\beta) \gamma_n(\alpha,\beta).$$

С помощью техники, развитой в работах [1] – [4], для некоторых частных случаев получены следующие оценки.

Лемма 1. Пусть $\widetilde{\alpha} = \frac{h}{t}$, $h, t \in \mathbb{N}$, $(h,t) = 1$, *и для каждого из чисел* $r \in \mathbb{N}_0 \cap [0, t-1]$ *выполнено соотношение*

$$\frac{4r + 2(\mu - 1)h + t}{4t} \neq m, \quad \text{где} \quad m \in \mathbb{Z}, \qquad (14)$$

тогда существуют положительные постоянные C_1 *и* n_1, *такие, что для всех* $n > n_1$ *верно неравенство* $|\gamma_n(\alpha,\beta)| \geq C_1 n^{-1/2}$.

Лемма 2. Пусть $\widetilde{\alpha} = \frac{h}{t}$, $h, t \in \mathbb{N}$, $(h,t) = 1$, *и нарушено условие (14). Тогда если выполнено условие*

$$k^2 a^2 \widetilde{\alpha} - \frac{(\mu^2 - \mu)\widetilde{\alpha}}{2} + \frac{(p^2 - p)}{2\widetilde{\alpha}} \neq 0, \tag{15}$$

то существуют положительная постоянная C_2 *и номер* n_2, *такие, что при всех* $n > n_2$ *верна оценка* $|\gamma_n(\alpha,\beta)| \geq C_2 n^{-3/2}$.

Лемма 3. Существует номер n_3, *такой, что, при нарушении условия (15), для рациональных значений* μ_1, *иррациональных чисел* $\widetilde{\alpha}$ *имеющих меру иррациональности* $\omega < 3$, *для всех* $n > n_3$ *верно неравенство* $|\gamma_n(\alpha,\beta)| > n^{1/2-\omega-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

Следствие из леммы 3. Если число $\widetilde{\alpha}$ является алгебраическим числом, а постоянная μ_1 – рациональным и не выполнено условие (15), то существует номер n_3, такой, что для всех $n > n_3$ верно неравенство $|\gamma_n(\alpha,\beta)| > n^{-3/2-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

Лемма 4. Пусть $\mu_1 \in \mathbb{Q}$, *выполнено условие (15), а величина* $\widetilde{\alpha}$ *есть квадратичная иррациональность вида* $\sqrt{d}$, *тогда если выполняется двойное неравенство* $\frac{\mu^2-\mu}{2} - \frac{p^2-p}{2d} - \frac{\pi^2}{16(d+\sqrt{d^2+d})} < k^2a^2 < \frac{\mu^2-\mu}{2} - \frac{p^2-p}{2d} + \frac{\pi^2}{16(d+\sqrt{d^2+d})}$, *то существует положительная постоянная* C_3, *такая, что при всех* n *выполняется неравенство* $|\gamma_n(\alpha,\beta)| \geq C_3 n^{-3/2}$.

Для обоснования сходимости ряда (8) также оценены величины φ_n и ψ_n.

Лемма 5. Если существует такое натуральное j, *что функции* $x^{\mu-i}\varphi^{(n-i)}(x)$, $x^{\mu-i}\psi^{(n-i)}(x)$, $i = 0, 1, ..., j-1$ *имеют ограниченное изменение на отрезке* $[0,a]$ *и выполняются условия* $\varphi^{(i)}(a) = 0$, $\psi^{(i)}(a) = 0$, $i = 1, 2, ..., j-2$ *при четных* j *и* $i = 1, 2, ..., j-1$ *при нечетных* j, *тогда существует такая постоянная* $C_4(j)$, *что верны оценки*

$$|\varphi_n| \leq C_4(j) n^{-j-1}, \quad |\psi_n| \leq C_4(j) n^{-j-1}. \tag{16}$$

Следствие из леммы 5. Если существует такое натуральное j, что $\varphi(x), \psi(x) \in C^{j+1}[0,a]$, $\mu \in (t, t+1]$, $t \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(j)}(0) = 0$, $\psi^{(j)}(0) = 0$, $j = \overline{1, 2, ..., j-t}$, $\varphi^{(i)}(a) = 0$, $\psi^{(i)}(a) = 0$, $i = 1, 2, ..., j-2$ при четных j и $i = 1, 2, ..., j-1$ при нечетных j, тогда верна оценка (16).

Оценки, приведенные в леммах 1-5 и следствиям из них, позволили доказать существование решения задачи. Формулировка результата для удобства разделена на две теоремы. Первая для рациональных значений константы $\widetilde{\alpha}$, а вторая – для иррациональных.

Теорема 2. Пусть $\widetilde{\alpha} \in \mathbb{Q}$, пусть также для всех натуральны $n \leq \max\{n_1, n_2\}$ выполнено условие (7), а также верно одно из следующих утверждений :
1) $\mu \in [1/2, 3/2)$ и выполнены условия леммы 1 и леммы 5 или следствия из леммы 5 при $j = 3$;
2) $\mu \in [1/2, 3/2)$ и выполнены условия леммы 2 и леммы 5 или следствия из леммы 5 при $j = 4$;
3) $\mu \in [s + 1/2, s + 3/2)$ для некоторого $s \in \mathbb{N}$ и выполнены условия леммы 1 и леммы 5 или следствия из леммы 5 при $j = s + 2$;
4) $\mu \in [s + 1/2, s + 3/2)$ для некоторого $s \in \mathbb{N}$ и выполнены условия леммы 2 и леммы 5 или следствия из леммы 5 при $j = s + 3$.
Тогда решение задачи (2) – (6) существует и единственно.

Теорема 3. Пусть $\widetilde{\alpha} \notin \mathbb{Q}$, пусть также исходные данные задачи, такие, что выполнены условия леммы 3 или следствия из леммы 3, или такие, что выполнены условия леммы 4, пусть, кроме того, для всех натуральных $n =\leq n_3$ выполнено условие (7), а также верно одно из следующих утверждений в зависимости от значения параметра μ :
1) при $\mu \in [1/2, 3/2)$ выполнены условия леммы 5 или следствия из леммы 5 при $j = 4$;
2) при $\mu \in [s + 1/2, s + 3/2)$ для некоторого $s \in \mathbb{N}$ выполнены условия леммы 5 или следствия из леммы 5 при $j = s + 3$;
тогда решение задачи (2) – (6) существует и единственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сабитов К.Б.* Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // Докл. РАН. 2007. № 1. С. 23–26.

2. *Сабитов К.Б., Сафина Р.М.* Первая граничная задача для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом // Изв. РАН. Сер. матем. 2018. № 2. С. 79–112.

3. *Сабитов К.Б., Вагапова Э.В.* Задача дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в прямоугольной области // Дифференциальные уравнения 2013. № 1. С. 68–78.

4. *Сабитов К.Б., Сафин Э.М.* Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Матем. заметки. 2010. № 6. С. 907–918.

УДК 517.956

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С КОНОРМАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

Абдуллаев А.А. [1] **, Исломов Б.** [2]
[1] *Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, Ташкент, Узбекистан;*
[2] *Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан;*
akmal09.07.85@mail.ru, islomovbozor@yandex.com

В данной работе исследуется краевая задача с конормальным граничным условием для уравнения эллиптического типа второго рода. Используя свойства обобщенных решений изучена видоизменённая задачи Дирихле, найдена формула ее решения. Единственность решения задачи доказывается методом интегралов энергии. Доказательство существования решения исследуемой задачи эквивалентно сводится к сингулярному интегральному уравнению, его однозначная разрешимость доказывается методом регуляризации Карлемана–Векуа.

Ключевые слова: уравнение эллиптического типа второго рода, задача с конормальным граничным условием, метод интегралов энергии, сингулярное интегральное уравнение, функция Грина.

ABOUT ONE BOUNDARY-VALUE PROBLEM WITH A CONORMAL CONDITION FOR AN ELLIPTIC TYPE EQUATION OF THE SECOND KIND

Abdullayev A.A. [1] **, Islomov B.** [2]
[1] *Tashkent institute of irrigation and agricultural mechanization engineers;*
[2] *National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;*
akmal09.07.85@mail.ru, islomovbozor@yandex.com

In this paper, we study a boundary value problem with a conormal condition for an equation of elliptic type of the second kind. Using the properties of generalized solutions, a modified Dirichlet problem is studied, and its solutions are found in a form convenient for further research. The uniqueness of the solution to Problem E is proved by the method of energy integrals. The existence of a solution to the problem under investigation is equivalently reduced to a singular integral equation, and the unique solvability of the singular integral equation is investigated by the Carleman - Vekua regularization method.

Key words: equation of elliptic type of the second kind, problem with conormal boundary condition, energy integrals method, singular integral equation, Green's function.

Рассмотрим уравнение

$$y^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad -1 < m < 0. \tag{1}$$

Пусть D - конечная однозначная область в плоскости (x, y), ограничена кривой σ при $x > 0$, $y > 0$ с концами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$ и отрезком AB оси Ox ов.

Введём обозначения

$$J = \{(x,y): \quad 0 < x < 1, \ y = 0\}, \quad \partial D = \vec{\sigma} \cup \overline{AB}, \quad 2\beta = \frac{m}{m+2},$$

причём

$$-0,5 < \beta < 0. \tag{2}$$

В области D для уравнения (1) исследуем следующую задачу.

Задача E. Требуется найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами: 1) $u(x,y) \in C\left(\bar{D}\right) \cup C^1\left(D \cup \sigma \cup J,\right)$ причем u_x и u_y могут обращаться бесконечность порядка меньше чем -2β в точках $A\,(0,0)$ и $B\,(1,0)$; 2) $u(x,y)-$ дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1) в области D; 3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\left.\{\delta(s) A_s[u] + \rho(s) u\}\right|_{\sigma} = \varphi(s), \qquad 0 < s < l, \tag{3}$$

$$a(x) u(x,0) + b(x) u_y(x,0) = c(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{4}$$

где $\delta(s)$, $\rho(s)$, $\varphi(s)$, $b(x)$, $c(x)$ заданные функции, причём

$$c(0) = 0, \tag{5}$$

$$a(x),\ b(x) \neq 0, \quad \forall x \in \bar{J}, \tag{6}$$

$$\delta^2(s) + \rho^2(s) \neq 0, \quad \forall s \in [0, l], \tag{7}$$

$$\delta(s),\ \ \rho(s),\ \ \varphi(s) \in C\,[0, l]\,, \tag{8}$$

$$a(x),\ b(x) \in C\left(\overline{J}\right) \cap C^2\,(J)\,, \tag{9}$$

и $A_s\,[u] = y^m \frac{dy}{ds}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{dx}{ds}\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{dx}{ds} = -\cos(n, y), \frac{dy}{ds} = \cos(n, x)$, $n-$ внешняя нормаль к кривой σ, $l-$ длина всей кривой σ, $s-$ длина дуги кривой σ, отсчитываемая от точки $B\,(1, 0)$.

Будем предполагать, что кривая σ удовлетворяет следующим условиям: 1) функции $x(s),\ y(s)$, дающие параметрическое уравнение кривой σ, имеют непрерывные производные $x'(s), y'(s)$, необращающиеся одновременно в нуль и имеют вторые производные, удовлетворяющие условию Гёльдера порядка $\kappa\,(0 < \kappa < 1)$ в промежутке $0 \leq s \leq l$; 2) в окрестности конечных точках кривая σ удовлетворяет неравенства:

$$\left|\frac{dx}{ds}\right| \leq const\, y^{m+1}(s), \tag{10}$$

причём $x(l) = y(0) = 0,\ x(0) = 1,\ y(l) = 0.$

Имеет место:

Теорема 1. *Если выполнены условия (2), (5), (6), (7) и*

$$\delta(s)\rho(s) \geq 0, \quad 0 \leq s \leq l, \quad \frac{a(x)}{b(x)} \leq 0,$$

то задача $\boldsymbol{E}$ *в области* D *не может иметь более одного решения.*

Единственность решения задачи E доказывается методом интегралов энергии. Для доказательство существования решения задачи **E** рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Задача DK**.** Найти в области D решение $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D \cup \sigma \cup J) \cap C^2(D)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (3) и

$$u|_{y=0} = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{11}$$

где $\tau(x)-$ заданная непрерывная функция, причём $\tau(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\gamma_0 \geq 1 - 2\beta$ в интервале $(0, 1)$ и представимо в виде

$$\tau(x) = \int_x^1 (t - x)^{-2\beta}\, T(t) dt, \tag{12}$$

где функция $T(t)$ непрерывна в (0,1) и интегрируема в $[0,1]$.

Единственность решения задачи DK следует из единственности решения задачи **E**.

Решение задачи DK с условиями (3) и (11) для уравнения (1) в области D существует, единственно и представимо в виде [1. см. (10.78)]:

$$u(x,y)=\int_0^1 \tau(\xi)\frac{\partial}{\partial\eta}G_2(\xi,0;x,y)d\xi+\int_0^l \frac{\varphi(s)}{\delta(s)}G_2(\xi,\eta;x,y)ds, \qquad (13)$$

где $G_2(\xi,\eta;x,y)-$ функция Грина задачи DK для уравнения (1) и она имеет вид [1,2]:

$$G_2(\xi,\eta;x,y)=G_{02}(\xi,\eta;x,y)+H_2(\xi,\eta;x,y),$$

здесь $G_{02}(\xi,\eta;x,y)-$ функция Грина задачи DK для уравнения (1) для нормальной области D_0, ограниченной отрезком $\overline{AB}$ и нормальной кривой $\sigma_0:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}=\frac{1}{4}$,

$$H_2\left(\xi,\eta;x,y\right)=G_2\left(\xi,\eta;x,y\right)\;-\;G_{02}\left(\xi,\eta;x,y\right)=$$

$$=\int_0^l \lambda_2(s;\xi,\eta)\left\{A_s\left[G_{02}\left(\xi\left(s\right),\eta\left(s\right);x,y\right)\right]+\frac{\rho(s)}{\delta(s)}G_{02}\left(\xi\left(s\right),\eta\left(s\right);x,y\right)\right\}ds,$$

где $\lambda_2\left(s;\xi,\eta\right)-$ решение интегрального уравнения

$$\lambda_2\left(s;\xi,\eta\right)+2\int_0^l \lambda_2\left(t;\xi,\eta\right)\left\{A_s\left[q_2\left(\xi\left(t\right),\eta\left(t\right)\;;x(s),y(s)\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\rho(s)}{\delta(s)}q_2\left(\xi\left(t\right),\eta\left(t\right);x(s),y(s)\right)\right\}dt=-2q_2(\xi(s),\eta(s);\xi,\eta),$$

а $q_2\left(x,\;y,x_0,y_0\right)$ - фундаментальное решение уравнение (1) и она имеет вид:

$$q_2\left(x,y,x_0,y_0\right)=$$

$$=k_2\left(\frac{4}{m+2}\right)^{4\beta-2}\left(r_1^2\right)^{-\beta}\left(1-\sigma\right)^{1-2\beta}F\left(1-\beta,1-\beta,2-2\beta;1-\sigma\right),$$

где $\left.\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix}\right\}=\left(x-x_0\right)^2+\frac{4}{(m+2)^2}\left(y^{\frac{m+2}{2}}\mp y_0^{\frac{m+2}{2}}\right)^2,\quad \sigma=\frac{r^2}{r_1^2},$

$$\beta=\frac{m}{2(m+2)},\quad -\frac{1}{2}<\beta<0,\quad k_2=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2-2\beta}\frac{\Gamma^2\left(1-\beta\right)}{\Gamma\left(2-2\beta\right)},$$

а $F\left(a,b,c;z\right)-$ гипергеометрическая функция Гаусса[1].

Дифференцируя по y уравнение (13), затем устремляя y к нулю с учётом (12) и свойств интегро-дифференциальных операторов[1,3], получим первое функциональное соотношение между $T(x)$ и $\nu(x)$, перенесенное из области D на J:

$$\nu(x)=-\frac{k_2\pi tg\beta\pi}{1-2\beta}T(x)+\frac{k_2}{1-2\beta}\int_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{-2\beta}T(t)\times$$

$$\times\left[\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right]dt+\int_0^1 T(t)dt\int_0^t\frac{\partial^2 H_2(z,0;x,0)}{\partial\eta\,\partial y}\times$$

$$\times\left(t-z\right)^{-2\beta}dz+\int_0^l\frac{\partial q_2(t,\eta;x,0)}{\partial y}\chi(s)ds,\quad (x,0)\in J. \qquad (14)$$

с учетом (12) из (4) на интервале J получим второе функциональное соотношение между $T(x)$ и $\nu(x)$:

$$\nu\left(x\right)=-\frac{a\left(x\right)}{b\left(x\right)}\int_x^1\left(t-x\right)^{-2\beta}T(t)dt+\frac{c(x)}{b\left(x\right)},\qquad (x,0)\in J. \qquad (15)$$

Исключив $\nu(x)$ из соотношений (14) и (15) получим сингулярного интегрального уравнения, далее применим метод регуляризации Карлемана-Векуа[4], получим интегрального уравнение Фредгольма второго рода, разрешимость которое следует из единственности решение задачи. Таким образом имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *Если выполнены условия (2), (5)-(10), то в области* D *решение задачи* ***E*** *существует.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа. 1985. 304 с.

2. *Islomov B.I., Abdullayev A.A.* On a problem for an elliptic type equation of the second kind with a conormal and integral condition // Journal Nanosystems: physics, chemistry, mathematics. 2018. Vol. 9. №3. P. 307–318.

3. *Yuldashev T. K., Islomov B.I., Abdullaev A. A.* On Solvability of a Poincare–Tricomi Type Problem for an Elliptic–Hyperbolic Equation of the Second Kind // Lobachevskii J. Math. 2021. Vol. 42. №3 P. 663–675.

4. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С РЕАКТИВНО-ДИФФУЗИОННЫМ ОПЕРАТОРОМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Абдуллаев О.Х. [1,2] **, Собиржонов А.** [2]

[1] *Институт математики имени В.И.Романовского . Ташкент. Узбекистан;*

[2] *Национальный университет Узбекистана. Ташкент. Узбекистана;*

obidjon.mth@gmail.com, avazbek.sobirjonov@gmail.com

Данная работа посвящена к исследованию локальной задаче с интегральным условием склеивания для нелинейного реактивно-диффузионно вольнового уравнения с дробным оператором Капуто. На основании теории интегральных уравнений доказаны единственность и существования решения исследуемой задачи.

Ключевые слова: уравнение параболо-гиперболического типа, реактивно-диффузионное уравнение, производная Капуто, единственность, существование, нелинейные интегральные уравнения, нелинейная нагруженная часть.

ON A PROBLEM FOR THE MIXED TYPE EQUATION WITH THE REACTIVE-DIFFUSION OPERATOR FRACTIONAL ORDER

Abdullaev O.Kh. [1,2] **. Sobirjonov A.** [2]

[1] *V.I.Romanovsky Institute of Mathematics, Uzbekistan;*

[2] *National university of Uzbekistan. Uzbekistan.*

obidjon.mth@gmail.com, avazbeksobirjonov1998@gmail.com

This work devoted to the investigation of local problem for the non-linear reactive-diffusion wave equation involving Caputo differential operator fractional order and non-linear loaded terms. Unique solvability of the considered problem reduced to the non-linear Volterra type integral *equations. Under certain condition to the given functions, uniqueness and existence of solution of the formulated problem was proved by the successive approximation method.*

Key words: reactive-diffusion equation, Caputo derivatives, existence and uniqueness of solution, non-linear integral equations, non-linear loaded term.

The present work aims to prove unequivocal solvability of some model problems for the equation

$$0 = \begin{cases} [(\beta u+\gamma)u]_{xx} - {}_C\, D_{0t}^{\alpha}u + \delta u - \mu u^2 + f_1(x,t;u(x,0)), \quad \text{at } t>0 \\ u_{xx} - u_{tt} + a_1(x,t)u_x + a_2(x,t)u_t + a_3(x,t)u+ \\ +f_2(x,t;u(x+t,0)), \quad \text{at } \ t<0 \end{cases} \tag{1}$$

where ${}_C D_{ot}^{\alpha}$ is Caputo derivatives:

$$_C D_{oy}^{\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha} u_s(x,s)ds, \tag{2}$$

and that, $u = u(x,t)$ is scalar function of point $x \in [0,1]$ and of time t, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{and} \mu$ are constant values, such that $\gamma > 0$, $0 < \alpha < 1$. We would like to note, that the Eq. (1), at $\alpha = 1$ coincides with the reactive-diffusion equation

$$u_t = [(\beta u + \gamma)u]_{xx} + \delta u - \mu u^2 \tag{3}$$

which widely used to describe the dynamics of an isolated spatially distributed population with variable diffusion in the population biology. For $\beta = 0, \delta = \mu$ from the Eq. (3) follows, well known (in mathematical biology) R.Fisher equation:

$$u_t = \gamma u_{xx} + \delta u(1-u).$$

which describes stochastic propagation models favorable gene in the diploid populations.

Let Ω be domain, bounded by intervals: $A_1A_2 = \{(x,\, t) : x = l,\, 0 < t < h\}$, $B_1B_2 = \{(x,\, t) : x = 0,\, 0 < t < h\}$, $B_2A_2 = \{(x,\, t) : t = h,\, 0 < x < 1\}$ for $t > 0$, and by characteristics: $A_1C : x - t = l$, $B_1C : x + t = 0$ of the equation (1) for $y < 0$, where $A_1 = (1;\, 0)$, $A_2 = (1;\, h)$, $B_1 = (0;\, 0)$, $B_2 = (0;\, h)$ and $C = \left(\frac{1}{2};\, \frac{-1}{2}\right)$.

Problem L. Find a solution $u(x,t)$ of Eq. (1) from the class:

$$V=\left\{u(x,t):\, u(x,t)\in C(\bar{\Omega}),\, u_x\in C\left(\Omega\cup B_1B_2\right),\, u_{xx}\in C\left(\Omega\right),\, {}_CD_{ot}^{\alpha}u\in C\left(\Omega\right)\right\}$$

with boundary:

$$u(1,t)=\psi_1(t),\ \ 0\le t\le h, \tag{4}$$

$$u_x(0,t)=\psi_2(t),\ \ 0<t<h, \tag{5}$$

$$u(x,-x)=\varphi(x),\ \ 0\le x\le \frac{l}{2}, \tag{6}$$

and gluing condition

$$\lim_{t\to+0} t^{1-\alpha}u_t(x,\,t)=\lambda_1(x)\,u_t(x,\,-0)+\lambda_2(x)\,u_x(x,\,-0)$$

$$+\lambda_3(x)\int\limits_0^x r(t)u(t,0)dt+\lambda_4(x)u(x,0)+\lambda_5(x),\ 0<x<1, \tag{7}$$

where $\varphi(x)$, $\psi_i(t)\,(i=1,2)$, $\lambda_j(x)\,(j=1,2,3)$ are given functions, such that $\sum\limits_{j=1}^{4}\lambda_j^2(x)\neq 0$. Based on a solution of the Cauchy problem with initial dates

$$u(x,0)=\tau(x),\ \ u_y(x,-0)=\nu^-(x), \tag{8}$$

and considering (6), we receive (see [1])

$$\nu^-(x)+\int_0^x K(x,\xi)\nu^-(\xi)d\xi=A(x)\tau(x)+\tau'(x)+\int_0^x B(x,\xi)\tau(\xi)d\xi+f(x); \tag{9}$$

where $K(x,\xi)=\frac{R_x(\frac{x}{2},-\frac{x}{2},\xi,0)-R_y(\frac{x}{2},-\frac{x}{2},\xi,0)}{2R(\frac{x}{2},-\frac{x}{2},x,0)}$,

$$f(x)=\frac{\left(R_x\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2},x,0\right)-R_y\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2},0,0\right)\right)\varphi(0)-2\varphi'(x)}{2R(\frac{x}{2},-\frac{x}{2},x,0)}-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x\frac{R\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2},\xi,0\right)}{2R\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2},x,0\right)}f_2\left(\frac{\xi+x}{2},\frac{\xi-x}{2},u(\xi,0)\right)d\xi-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x d\xi\int_\xi^x\frac{R_x\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2},\xi,0\right)}{2R\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2},x,0\right)}f_2\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2},u(\xi,0)\right)d\eta$$

$$A(x)=\frac{R_x(\frac{x}{2},-\frac{x}{2},x,0)-R_y(\frac{x}{2},-\frac{x}{2},x,0)}{2R(\frac{x}{2},-\frac{x}{2},x,0)}+$$
$$+\frac{2R_\xi(\frac{x}{2},-\frac{x}{2},x,0)+2R_\eta(\frac{x}{2},-\frac{x}{2},x,0)+b_2(x,0)R(\frac{x}{2},-\frac{x}{2},x,0)}{2R(\frac{x}{2},-\frac{x}{2},x,0)};$$
$$B(x,\xi)=\frac{R_{\eta x}(\frac{x}{2},-\frac{x}{2},\xi,0)-R_{\eta y}(\frac{x}{2},-\frac{x}{2},\xi,0)}{2R(\frac{x}{2},-\frac{x}{2},x,0)}+$$
$$+\frac{b_2(x,0)\left(R_x(\frac{x}{2},-\frac{x}{2},\xi,0)-R_y(\frac{x}{2},-\frac{x}{2},\xi,0)\right)}{2R(\frac{x}{2},-\frac{x}{2},x,0)};$$

As we know, equation (7) is the Volterra type integral equation of second kind, and a solution of this equation we can write via resolvent kernel:

$$\nu^-(x)=A(x)\tau(x)+\tau'(x)+\int_0^x B(x,\xi)\tau(\xi)d\xi+f(x)+\int_0^x \Re(x,\xi)A(\xi)\tau(\xi)d\xi+$$
$$+\int_0^x \Re(x,\xi)\tau'(\xi)d\xi+\int_0^x \Re(x,\xi)d\xi\int_0^\xi B(x,t)\tau(t)dt+\int_0^x \Re(x,\xi)f(\xi)d\xi. \qquad (10)$$

At $t\to+0$ considering designations (6) and $\lim\limits_{t\to+0} {}_C D_{0t}^{\alpha}u(x,t)=\nu^+(x)$ from the Eq.(1),we get

$$\gamma\tau''(x)-\nu^+(x)=-2\beta\left(\tau(x)\tau'(x)\right)'-\delta\tau(x)+\mu\tau^2(x). \qquad (11)$$

Considering gluing condition (5) owing to (8) and taking $\tau(0)=\varphi(0)$, $\tau'(0)=\psi_2(0)$ into account, from (9) we get non-linear Volterra type integral equation respected to $\tau(x)$. Under certain class of the given functions, unique solvability of the resulting integral equation is proved by the successive approximation method.

REFERENCES

1. *Abdullaev O.Kh.* Solvability of BVPs for the Parabolic-hyperbolic Equation with Non-linear loaded Term. // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics 2021, 14(2), 1-11. DOI: 10.17516/1997-1397-2021-14-2-1-11

УДК 517.956.6

ТРЕХМЕРНЫЙ АНАЛОГ ЗАДАЧИ ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Аликулов Е.К.
ТУИТ имени Мухаммада ал-Хоразмий,г.Ташкент,Узбекистан;
aliqulov.yolqin.1984@mail.ru

В работе изучается краевая задача Геллерстедта с граничным условием на параллельных характеристических плоскостях для нагруженного эллиптико-гиперболического уравнения в бесконечной трёхмерной области.

Ключевые слова: нагруженное эллиптико-гиперболическое уравнение, задача Геллерстедта, преобразование Фурье, регулярное решение, принцип экстремума, оценка решения.

A THREE-DIMENSIONAL ANALOGUE OF THE GELLERSTEDT PROBLEM FOR A LOADED EQUATION OF ELLIPTIC-HYPERBOLIC TYPE

Alikulov Y.K.
TUIT named after Muhammad al-Khwarazmi, Tashkent, Uzbekistan;
aliqulov.yolqin.1984@mail.ru

The paper studies the Gellerstedt boundary value problem with the boundary condition on parallel characteristic planes for a loaded elliptic-hyperbolic equation in an infinite three-dimensional domain.

Key words: Loaded equation, Gellerstedt problem, Fourier transform, regular solution, extremum principle, solution estimate.

Трехмерные аналоги задаче Трикоми и Геллерстедта для уравнения эллиптико-гиперболического изучены в работах [1 – 3].

Насколько нам известно, что трехмерные краевые задачи для нагруженного уравнения параболо-гиперболического и эллиптико-гиперболического типов ранее мало изучены. Отметим работы [4, 5].

В настоящей работе изучается аналог задачи Геллерстедта для нагруженного уравнения эллиптико-гиперболического типа в бесконечной цилиндрической области, когда искомая функция задается на параллельных характеристических плоскостях.

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} U_{yy} + U_{xx} + U_{zz} + \mu U(x,0,z) & \text{в} \quad \Omega_0, \\ \\ U_{yy} - U_{xx} + U_{zz} - \mu U(x,0,z) & \text{в} \ \ \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3. \end{cases} \tag{1}$$

Пусть $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup (\overline{\Omega_0} \cap \overline{\Omega_1}) \cup (\overline{\Omega_0} \cap \overline{\Omega_2}) \cup (\overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_3}) \cup (\overline{\Omega_2} \cap \overline{\Omega_3})$ - область, трехмерного пространства (x,y,z), ограниченная поверхностями:

$$S_0 : (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}, \quad y \geq 0, \quad S_1 : x + y = 0, \quad y \leq 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{x_0}{2},$$

$$S_2 : x - y = x_0, \quad y \leq 0, \quad \frac{x_0}{2} \leq x \leq x_0, \ \ S_3 : x + y = x_0, \ \ y \leq 0,$$

$$x_0 \leq x \leq \frac{1 + x_0}{2}, \ \ S_4 : x - y = 1, \ \ y \leq 0, \ \ \frac{1 + x_0}{2} \leq x \leq 1, \ \ -\infty < z < +\infty,$$

$$\mu = const < 0, \tag{2}$$

где $x_0 \in [0,1]$.

Уравнения (1) является эллиптическим и гиперболическим в областях Ω_0 и Ω_j $(j = 1,2,3)$ соответственно.

Введем обозначения

$$D = \Omega \cap \{z = 0\}, \ \ D_i = \Omega_i \cap \{z = 0\}, \ \ i = \overline{0,3}, \ \ \sigma_j = S_j \cap \{z = 0\}, \ \ j = \overline{0,4},$$

Задача Г. Определить функцию $U(x,y,z)$, со следующими свойствами:1) $U(x,y,z)$ функция непрерывна вплоть до границы области Ω; 2) $U(x,y,z) \in C^1(\Omega \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4)$, причем $U_y(x,0,z)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы на $\overline{S_0} \cap \overline{S_1}$ $(\overline{S_2} \cap \overline{S_3})$, ограничена на $\overline{S_2} \cap \overline{S_3}$ $(\overline{S_0} \cap \overline{S_4})$; 3) $U(x,y,z)$ - дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1) в областях Ω_0 и Ω_j $(j = 1,2,3)$; 4) $U(x,y,z)$ удовлетворяет условиям

$$U_{|S_0} = \Psi_0(x,z), 0 \leq x \leq 1, \ \ U_{|S_1} = \Psi_1(x,z), 0 \leq x \leq \frac{x_0}{2}, \tag{3}$$

$$U_{|S_3} = \Psi_2(x,z), \ \ x_0 \leq x \leq \frac{x_0 + 1}{2}, -\infty < z < +\infty, \tag{4}$$

$$\lim_{|z| \to \infty} U = \lim_{|z| \to \infty} U_y = \lim_{|z| \to \infty} U_x = \lim_{|z| \to \infty} U_z = 0, \tag{5}$$

где $\Psi_0(x,z),\Psi_1(x,z),\Psi_2(x,z)$ - заданные достаточно гладкие функции, причем $\Psi_0(0,z)=\Psi_1(0,z)$.

Решение задачи Г будем искать в классе функций, представимых интегралом Фурье:

$$U(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(x,y;\lambda)\cdot e^{-i\lambda z}d\lambda, \tag{6}$$

тогда задача Г эквивалентно сводится к плоской задаче для уравнения

$$0=\begin{cases} u_{yy}+u_{xx}-\lambda^2u+\mu u(x,0,\lambda) & \text{в} \ \ D_0, \\ \\ u_{yy}-u_{xx}+\lambda^2u-\mu u(x,0,\lambda) & \text{в} \ \ D_1\cup D_2\cup D_3. \end{cases} \tag{7}$$

Задача Γ_λ . Найти функцию $u(x,y,\lambda)$ такую, что:

1) $u(x,y,\lambda)\in C(\overline{D})\cap C^1(D\cup\sigma_1\cup\sigma_2\cup\sigma_3\cup\sigma_4)$, причем $u_y(x,0,\lambda)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы при $x\to 0$ $(x\to x_0)$, а при $x\to x_0$ $(x\to 1)$ ограничена;

2) $u(x,y,\lambda)$ - дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (7) в областях D_0 и D_j $(j=1,2,3)$; 3) $u(x,y,\lambda)$ удовлетворяет условиям

$$u_{|\sigma_0}=\psi_0(x,\lambda),\ \ 0\le x\le 1,\ \ u_{|\sigma_1}=\psi_1(x,\lambda),\ \ 0\le x\le\frac{x_0}{2}, \tag{8}$$

$$u_{|\sigma_3}=\psi_2(x,\lambda),\quad x_0\le x\le\frac{x_0+1}{2},\ \ -\infty<\lambda<+\infty, \tag{9}$$

где $\varphi_0(x,\lambda),\psi_1(x,\lambda),\psi_2(x,\lambda)$ - заданные функции

$$\psi_j(x,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Psi_j(x,z)\cdot e^{i\lambda z}dz,\ \ (j=\overline{0,2}), \tag{10}$$

причем $\psi_0(0,\lambda)=\psi_1(0,\lambda)$,

$$\psi_0(x,\lambda)=\left[\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2\right]^{\frac{\varepsilon}{2}}\overline{\psi_0}(x,\lambda),\ \ \overline{\psi_0}(x,\lambda)\in C(\overline{J_0}),\varepsilon\ge 1, \tag{11}$$

$$\psi_1(x,\lambda)\in C^3\left[0,\frac{x_0}{2}\right],\ \ \psi_2(x,\lambda)\in C^3\left[\frac{1+x_0}{2},1\right] \tag{12}$$

и эти функции при больших значениях $|\lambda|$ удовлетворяет оценки:

$$\psi_0(x,\lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|^k ch|\lambda|}\right), \;\; \psi_1(x,\lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|^{k+1} ch|\lambda|}\right),$$

$$\psi_1'(x,\lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|^k ch|\lambda|}\right), \;\; \psi_2(x,\lambda) = O\left(\frac{ch\frac{|\lambda|(x_0+1)}{2}}{|\lambda|^{k+1} ch|\lambda|}\right),$$

$$\psi_2'(x,\lambda) = O\left(\frac{ch|\lambda|x_0}{|\lambda|^k ch|\lambda|}\right), k > 3. \tag{13}$$

Теорема. *Пусть выполнены условия* $(2), (11), (12), (13), (14)$. *Если в области* D *существует решение задачи* G_λ *для уравнения (7), единственно и при больших значениях* $|\lambda|$ *допускает оценку* $u(x,y,\lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|^k}\right)$, $k > 3$, *то в области* Ω *решение задачи* G *для уравнения (1) оно определяется формулой (6).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А.В.* Об одном трехмерном аналоге задачи Трикоми // // Сибирский математический журнал. 1962. Т. III. С. 642–644.

2. *Нахушев А.М.* Об одном трехмерном аналоге задачи Геллерстедта // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. № 1. С. 52–62.

3. *Салахитдинов М.С., Исламов Б.И.* О трехмерном аналоге задачи Трикоми для уравнений смешанного типа // Доклады АН СССР. 1990. Т. 311. № 4 С. 797–801.

4. *Yuldashev T.K., Islomov B.I., Alikulov E. K.* Boundary-Value Problems for Loaded Third-Order Parabolic-Hyperbolic Equations in Infinite Three-Dimensional Domains // Labachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41. № 5. P. 926–944.

5. *Islomov B.I., Alikulov E. K.* Boundary value problem for loaded equation of parabolic-hyperbolic type of the third order in an infinite three-dimensional domain // IJAM. 2021. Vol. 34. No 2. P. 377–390.

УДК 517.95; 517.956.6

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ДРОБНОГО ПОРЯДКА С НЕХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЛИНИЕЙ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

Ахмадов И.А.
Национальный Университет Узбекистана, г. Ташкент, Узбекистан; ahmadov.ilhom@mail.ru

Настоящая работа посвящена постановке и изучению нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа дробного порядка с нехарактеристической линией изменения типа. Доказана единственность и существование решения поставленной задачи

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, регулярное решение, условия склеивания, оператор дробного порядка, метод Римана, критерий единственности и существование.

NONLOCAL PROBLEM FOR A MIXED-TYPE EQUATION OF FRACTIONAL ORDER WITH A NON-CHARACTERISTIC LINE OF CHANGE OF TYPE

Ahmadov I.A.
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan; ahmadov.ilhom@mail.ru

The present work is devoted to the formulation and study of a nonlocal boundary value problem for an equation of mixed type of fractional order with a noncharacteristic line of change in type.The uniqueness and existence of a solution to the problem is proved.

Key worts: mixed-type equation, regular solution, gluing conditions, fractional order operator, Riemann method, uniqueness criterion, existence.

Зарубежными учеными и учеными нашей страны в настоящее время особое внимание уделяют исследованию и поиску эффективных методов решения различных задач для уравнений в частных производных дробного порядка. Отметим работы М.С. Салахитдинова, Ш.А. Алимова, Р.Р. Ашурова, А.Псху, R. Gorenflo, Y.F. Luchko, C.P.

Умарова, Б.И.Исломова, Х. Б.Турметова, Б.Ж.Кадиркулова, Э.Т. Каримова, О.Х. Абдуллаева, Н.К. Очиловой.

В работах [1-2] изучены прямые задачи с нелокальными условиями для смешанного уравнения с оператором дробного дифференцирования в смысле Капуто в смешанной области, состоящая характеристическим треугольнику и прямоугольнику.

Прямые и обратные задачи для смешанных уравнений с дробного порядка в смысле Римана-Лиувилля и Капуто в прямоугольной области, исследованы в работах [3-5].

Настоящая работа посвящена постановке и изучению нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа дробного порядка с нехарактеристической линией изменения типа.

Рассмотрим уравнение

$$Lu = f(x, y), \tag{1}$$

где

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} - D_{0y}^{\alpha} u\,, & (x;y) \in \Omega_1, \\ u_{xx} - (-x)^m u_{yy}\,, & (x;y) \in \Omega_2, \end{cases} \tag{2}$$

$$m > 0\,, \qquad 0 < \alpha \leq 1, \tag{3}$$

здесь Ω_1 – область, ограниченная отрезками AB, AB_0, B_0A, A_0A прямых $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $x = 0$ соответственно; Ω_2 – характеристический треугольник, ограниченный отрезком AA_0 оси $y-$ ов и двумя характеристиками

$$AC : \ y - (1 - 2\beta)(-x)^{1/1-2\beta} = 0, A_0C : y + (1 - 2\beta)(-x)^{1/1-2\beta} = 1$$

уравнения (1), выходящими из точек $A(0, 0)$ и $A_0(0, 1)$, пересекающимися в точке $C\,(-0,5\,;\ 0,5)$,

$$J = \{(x, y) : \ \ x = 0, \ \ 0 < y < 1\}\,, \ \ \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup J,$$

где $f(x, y) \in C(\Omega) \cap L_2(\bar{\Omega})$ заданная функция, а $\beta = \frac{m}{2(m+2)}$, причем

$$0 < \beta < \frac{1}{2}. \tag{4}$$

$D_{0y}^{\alpha}\,[\cdot]$ – оператор (в смысле Римана-Лиувилля) дифференцирования дробного порядка $\alpha \ \in (0, 1]$ от функции $u(x, y)$ по второй переменной [6, стр. 341]:

$$D_{0y}^{\alpha}u\left(x,y\right)=\frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\frac{d}{dy}\int\limits_{0}^{y}\frac{u\left(x,t\right)dt}{\left(y-t\right)^{\alpha}} \tag{5}$$

В области Ω для уравнения (1) исследуем следующую задачу.

Задача С. Найти функцию $u\left(x,y\right)$, со следующими свойствами:

1) $u\left(x,y\right)\in\left(\bar{D}\right),\quad y^{1-\alpha}u(x,y)\in C\left(\bar{D}_1\right)$;

2) $u\left(x,y\right)\in C_x^2(\Omega_1\cup\Omega_2)\cap C_y^2(\Omega_2),\quad D_{0y}^{\alpha}u(x,y)\in C(\Omega_1)$ и удовлетворяет уравнению (1) в областях $\Omega_j\,(j=1,2)$;

3) $u\left(x,y\right)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u\left(x,y\right)|_{BB_0}=\varphi\left(y\right),\ \ 0\le y\le 1,$$

$$\lim_{y\to 0}D_{0y}^{\alpha-1}u(x,y)=\Gamma(\alpha)\lim_{y\to 0}y^{1-\alpha}u(x,y)=\tau(x),\quad 0\le x\le 1,$$

$$D_{0y}^{\beta}y^{2\beta-1}u\left[\theta_0\left(y\right)\right]=a(y)u\left(-0,y\right)+b\left(y\right),(0,y)\in J;$$

4) $u_x\in C\left(\Omega_1\bigcup J\right)\bigcap C\left(\Omega_2\bigcup J\right)$ и на отрезке J выполняются условия склеивания

$$u_x\left(+0,y\right)=u_x\left(-0,y\right),\quad 0<y<1,$$

где $\varphi\left(y\right)$, $a(y)$, $b(y)$, $\tau\left(x\right)$ - заданные функции, причем $\tau(1)=\varphi(0)$,

$$\tau\left(x\right)\in C\left[0,1\right]\cap C^2(0,1),\quad y^{1-\alpha}\varphi\left(y\right)\in C\left[0,1\right]\cap C^1\left(0,1\right), \tag{6}$$

$$a(y),\ b(y)\in C^1\left(\bar{J}\right)\cap C^3\left(J\right), \tag{7}$$

здесь $\theta_0(y)=\left(-\left(\frac{m+2}{4}y\right)^{\frac{2}{m+2}},\frac{y}{2}\right)-$ точка пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(0,y)$, с характеристикой AC, а $D_{0y}^{\beta}y^{2\beta-1}g(y)$ определяется из (5).

Доказана следующая

Теорема. *Если выполнены условия (3), (4), (6) и (7), то в области* Ω *существует единственное регулярное решение задачи* C.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Салахитдинов М.С., Каримов Э.Т.* Об одной нелокальной задаче с условиями сопряжения интегрального вида для параболо-гиперболического с оператором Капуто // Доклады АН РУз. 2014. № 4. С. 6–9.

2. *E.T.Karimov, J.S.Akhatov.* A boundary problem with integral gluing condition for a parabolic-hyperbolic equation involving the Caputo fractional derivative // Electronic Journal of Differential Equations. Vol. 2014 (2014). №. 14. P. 1–6.

3. *Исломов Б. И., Убайдуллаев У. Ш.* Краевая задача для уравнения параболо - гиперболического типа с оператором дробного порядка в смысле Капуто в прямоугольной области // Научный вестник. Математика. 2017. № 5. С. 25–30.

4. *Islomov B.I., Ubaydullayev U.Sh.* On a Boundary-value Problem for a Parabolic-Hyperbolic Equation with Fractional Order Caputo Operator in Rectangular Domain // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41. № 9. P. 1801–1810.

5. *Исломов Б.И., Убайдуллаев У.Ш.* Обратная задача для уравнения смешанного типа с оператором дробного порядка в прямоугольной области // Известия высших учебных заведений. Математика. 2021. № 3. С. 29–46.

6. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника. 1987. 688 с.

УДК 517.95

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ И СОПРЯЖЕНИЕМ ДЛЯ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Балкизов Ж.А.

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, г. Нальчик, Россия

Giraslan@yandex.ru

В работе исследована внутреннекраевая задача со смещением для одного смешанно-гиперболического уравнения второго порядка, состоящего из волнового оператора в одной части области и с вырождающимся гиперболическим оператором первого рода в другой части. Найдены достаточные условия на заданные функции, обеспечивающие регулярность искомого решения.

Ключевые слова: волновое уравнение, вырождающееся гиперболическое уравнение первого рода, интегральное уравнение Вольтерра, интегральное уравнение Фредгольма, метод Трикоми, метод интегральных уравнений, методы теории дробного исчисления.

BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH DISPLACEMENT AND CONJUGATION FOR TWO EQUATIONS OF HYPERBOLIC TYPE

Balkizov Zh.A.
Institute of Applied Mathematics and Automation of the KBSC RAS,
Nalchik, Russia
Giraslan@yandex

The paper investigates an internal boundary value problem with a shift for a second-order mixed-hyperbolic equation consisting of a wave operator in one part of the domain and with a degenerate hyperbolic operator of the first kind in the other part. Sufficient conditions are found for the given functions to ensure the regularity of the desired solution.

Key words: wave equation, degenerate hyperbolic equation of the first kind, Volterra integral equation, Fredholm integral equation, Tricomi method, method of integral equations, methods of fractional calculus theory.

На евклидовой плоскости точек (x, y) рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} (-y)^m u_{xx} - u_{yy} + \lambda(-y)^{\frac{m-2}{2}} u_x, & y < 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + f(x,y), & y > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $m, \lambda-$ заданные числа, причем $m > 0$, $|\lambda| \leq \frac{m}{2}$, $f = f(x,y) -$ заданная функция, $u = u(x,y) -$ искомая функция.

Уравнение (1) при $y < 0$ является вырождающимся гиперболическим уравнением первого рода

$$(-y)^m u_{xx} - u_{yy} + \lambda(-y)^{\frac{m-2}{2}} u_x = 0, \tag{2}$$

а при $y > 0$ уравнение (1) совпадает с неоднородным волновым уравнением

$$u_{xx} - u_{yy} + f(x, y) = 0. \tag{3}$$

Уравнение (1) рассматривается в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup I$, где Ω_1- это область, ограниченная характеристиками $\sigma_1 = AC$: $x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 0$ и $\sigma_2 = CB : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = r$ уравнения (2), выходящими из точки $C = (r/2, y_C)$, $y_C = -\left[\frac{r(m+2}{4}\right]$, проходящими через точки $A = (0, 0)$ и $B = (r, 0)$, соответственно, и отрезком $I = AB$ прямой $y = 0$; Ω_2- область, ограниченная характеристиками $\sigma_3 = AD : x - y = 0$, $\sigma_4 = BD : x + y = r$ уравнения (3), выходящими из точек A и B, пересекающимися в точке $D = \left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right)$ и отрезком $I = AB$.

Регулярным в области Ω *решением* уравнения (1) назовем функцию $u = u\,(x,\, y)$ из класса $u\,(x, y) \in C\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^1\,(\Omega) \cap C^2\,(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, при подстановке которой уравнение (1) обращается в тождество.

Задача 1. *Найти регулярное в области* Ω *решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$u(x, y)|_{AD} = \psi_1(x), \qquad 0 \leq x \leq r, \tag{4}$$

$$\alpha(x)x^{\varepsilon_1} D_{0x}^{1-\varepsilon_2}\left(u(x, y)|_{AC}\right) + \beta(x) D_{0x}^{1-\varepsilon} u(t, 0) +$$
$$+\gamma(x) u_y(x, 0) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq r, \tag{5}$$

где $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)-$ *заданные на отрезке* $[0, r]$ *функции, причем* $\alpha^2(x) + \beta^2(x) + \gamma^2(x) \neq 0 \ \forall \ x \in [0, r]$; $\varepsilon_1 = \frac{m-2\lambda}{2(m+2)}$, $\varepsilon_2 = \frac{m+2\lambda}{2(m+2)}$, $\quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{m}{m+2}$.

Исследуемая в рамках данной работы внутренне-краевая задача 1 относится к классу краевых задач со смещением Жегалова-Нахушева [1], [2] и является обобщением задачи Гурса для модельного уравнения вида (1). Ранее задача Гурса для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения исследованы в работах [3], [4]. Нелокальная задача со смещением для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа второго порядка в прямоугольной области исследована в работе [5]. Задачи со смещением для вырождающихся внутри области гиперболических уравнений были исследованы в работах [6], [7], [8].

В рамках данного доклада доказана следующая

Теорема. *Пусть заданные функции* $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $f(x,y)$ *таковы, что*

$$\alpha(x), \beta(x), \gamma(x), \psi_2(x) \in C[0,r] \cap C^2(0,r),$$

$$\psi_1(x) \in C^1[0,r] \cap C^3(0,r), \;\; f(x,y) \in C(\overline{\Omega_2}),$$

и выполнено одно из условий: либо

$$\gamma(x) - \gamma_2 \alpha(x) \neq 0 \;\; \forall\, x \in [0,r],$$

либо же

$$\gamma(x) - \gamma_2 \alpha(x) \equiv 0, \;\; \beta(x) + \gamma_1 \alpha(x) \neq 0 \;\; \forall\, x \in [0,r],$$

где $\gamma_1 = \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon_2)}$, $\gamma_2 = \frac{\Gamma(1-\varepsilon)(2-2\varepsilon)^{\varepsilon-1}}{\Gamma(1-\varepsilon_1)}$. *Тогда существует единственное регулярное в области* Ω *решение задачи 1.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жегалов В.И.* Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничным условием на обеих характеристиках с разрывами на переходной линии // Ученые записки Казанского государственного университета им. В.И. Ленина. 1962. Т.122, №3. С. 3–16.

2. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных // М.: Наука, 2006. 287 с.

3. *Кальменов Т.Ш.* Критерий непрерывности решения задачи Гурса для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1972. Т.8, №1. С. 41–55.

4. *Балкизов Ж.А.* Краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Известия Высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия Естественные науки. 2016. №1(189). С. 5–10.

5. *Сабитов К.Б.* Нелокальная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Матем. заметки. 2011. Т.89, №4. С. 596–602.

6. *Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.* О некоторых краевых задачах для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области // Дифференц. уравнения. 1981. Т.17, №1. С. 129–136.

7. *Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.* О двух нелокальных краевых задачах для вырождающегося гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1982. Т.18, №1. С. 116–127.

8. *Репин О.А.* О задаче с операторами М. Сайго на характеристиках для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физико-математические науки. 2006. №43. С. 10–14.

УДК 517.95

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ПЛОСКОСТЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

Гималтдинова А.А.
Уфимский государственный нефтяной технический университет, г. Уфа, Россия;
aa-gimaltdinova@mail.ru

Получена теорема единственности решения задачи Дирихле для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с двумя плоскостями изменения типа в параллелепипеде.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, задача Дирихле, единственность решения.

ON THE DIRICHLET PROBLEM FOR A MIXED-TYPE THREE-DIMENSIONAL EQUATION WITH TWO PLANES OF CHANGE TYPE

Gimaltdinova A.A. [1]
[1] *Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia;*
aa-gimaltdinova@mail.ru

A uniqueness theorem for the solution of the Dirichlet problem for an equation of mixed elliptic-hyperbolic type with two planes of type change in a parallelepiped is obtained.

Key words: mixed type equation, Dirichlet problem, uniqueness of solution.

Рассмотрим уравнение смешанного эллиптико-гиперболического типа

$$Lw \equiv w_{zz} + (\operatorname{sign} x)w_{xx} + (\operatorname{sign} y)w_{yy} = 0, \tag{1}$$

в области

$$Q = \{(x, y, z) \in R^3 |\ -1 < x < 1,\ -1 < y < 1,\ 0 < z < \alpha\},$$

где $\alpha > 0$ – заданное действительное число.

Задача D**.** *Найти функцию* $w(x, y, z)$, *удовлетворяющую следующим условиям*

$$w(x, y, z) \in C^1(\overline{Q}) \cap C^2(Q), \tag{2}$$

$$Lw(x, y, z) \equiv 0, \ \ (x, y, z) \in Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4, \tag{3}$$

$$w(x, y, z)\big|_{x=-1} = w(x, y, z)\big|_{x=1} = 0,\ 0 \le z \le \alpha,\ -1 \le y \le 1, \tag{4}$$

$$w(x, y, z)\big|_{z=0} = w(x, y, z)\big|_{z=\alpha} = 0,\ -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1, \tag{5}$$

$$w(x, y, z)\big|_{y=-1} = g(x, z),\ \ w(x, y, z)\big|_{y=1} = \gamma(x, z),\ -1 \le x \le 1,\ 0 \le z \le \alpha, \tag{6}$$

где $g(x, z), \gamma(x, z)$ *– заданные достаточно гладкие функции,* $Q_1 = Q \cap \{x > 0,\ y > 0\}$, $Q_2 = Q \cap \{x < 0,\ y > 0\}$, $Q_3 = Q \cap \{x < 0,\ y < 0\}$, $Q_4 = Q \cap \{x > 0,\ y < 0\}$.

В работе [1] изучена задача для двумерного уравнения

$$Lu \equiv (\operatorname{sign} x)u_{xx} + (\operatorname{sign} y)u_{yy} = 0$$

в области

$$D = \{(x, y) \in R^3 |\ -1 < x < 1,\ -\alpha < y < \beta\}.$$

Был установлен критерий единственности и решение задачи построено в виде суммы ряда по биортогональной системе двух взаимно-сопряженных спектральных задач на сопряжение для обыкновенного дифференциального оператора второго порядка с разрывным коэффициентом при старшей производной.

В работе [2] была изучена задача Дирихле для трехмерного уравнения с одной плоскостью изменения типа.

В настоящей работе установим теорему единственности задачи (2) – (6).

После разделения переменных $w(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ относительно $X(x)$ и $Z(z)$ получим две одномерные спектральные задачи

$$Z'' + \lambda^2 Z = 0, \quad Z(0) = Z(\alpha) = 0, \tag{7}$$

$$(\operatorname{sign} x)X'' + \mu^2 X = 0, \quad X(-1) = X(1) = 0, \tag{8}$$

где λ^2, μ^2 – постоянные разделения.

Собственные значения спектральной задачи (7): $\lambda_n = \pi n/\alpha$, соответствующие собственные функции $Z_n(z) = \sin(\pi n z/\alpha)$.

Собственные значения спектральной задачи (8) находятся как корни трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}\mu = -\operatorname{th}\mu:$ $\mu_k = -\pi/4 + \pi k + \varepsilon_k$, $(1/8)e^{\pi/2}e^{-2\pi k} < \varepsilon_k < (\pi/2)e^{\pi/2}e^{-2\pi k}$, собственные функции

$$X_k^{(1)}(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}[\mu_k(x+1)]}{\operatorname{ch}(\mu_k)}, & -1 \le x < 0, \\[2ex] \dfrac{\sin[\mu_k(x-1)]}{\cos(\mu_k)}, & 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

$$X_k^{(2)}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin[\mu_k(x+1)]}{\cos(\mu_k)}, & -1 \le x < 0, \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sh}[\mu_k(x-1)]}{\operatorname{ch}(\mu_k)}, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

В работе [3] доказано, что система $\{(\operatorname{sign} x)X_k^{(1)}(x),$ $(\operatorname{sign} x)X_k^{(2)}(x)\}$ полна и образует базис Рисса в пространстве $L_2[-1,1]$.

Тогда система $\{(\operatorname{sign} x)X_k^{(1)}(x)Z_n(z),\ (\operatorname{sign} x)X_k^{(2)}(x)Z_n(z)\}$ полна в пространстве $L_2(D)$, где $D = \{(x,z) \in R^2 |\ -1 < x < 1,\ 0 < z < \alpha\}$.

Пусть существует решение $w(x,y,z)$ задачи (2)–(6). Рассмотрим функции

$$u_{nk}^{(1)}(y) = \iint\limits_D w(x,y,z)(\operatorname{sign} x)X_k^{(1)}(x)Z_n(z)dxdz, \tag{9}$$

$$u_{nk}^{(2)}(y) = \iint\limits_D w(x,y,z)(\operatorname{sign} x)X_k^{(2)}(x)Z_n(z)dxdz. \tag{10}$$

Можно убедиться, что функции (9) удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(\operatorname{sign} y)(u_{nk}^{(1)})'' - (\lambda_n^2 + \mu_k^2)u_{nk}^{(1)} = 0. \tag{11}$$

Обозначим $c_{nk}=\sqrt{\lambda_n^2+\mu_k^2}$ и запишем общее решение уравнения (11):

$$u_{nk}^{(1)}(y)=\begin{cases} a_{nk}^{(1)}\operatorname{ch}(c_{nk}y)+b_{nk}^{(1)}\operatorname{sh}(c_{nk}y), & y>0,\\ a_{nk}^{(1)}\cos(c_{nk}y)+b_{nk}^{(1)}\sin(c_{nk}y), & y<0.\end{cases} \tag{12}$$

Аналогично для функций (10) можем получить представление

$$u_{nk}^{(2)}(y)=\begin{cases} a_{nk}^{(2)}\cos(c_{nk}y)+b_{nk}^{(2)}\sin(c_{nk}y), & y>0,\\ a_{nk}^{(2)}\operatorname{ch}(c_{nk}y)+b_{nk}^{(2)}\operatorname{sh}(c_{nk}y), & y<0,\end{cases} \tag{13}$$

где $a_{nk}^{(i)},b_{nk}^{(i)}$ – неизвестные пока коэффициенты. Для их нахождения используем формулы (12), (13) и граничные условия (6):

$$u_{nk}^{(1)}(1)=\iint\limits_D \gamma(x,y)(\operatorname{sign}x)X_k^{(1)}(x)Z_n(z)dxdz=\gamma_{nk}^{(1)},$$

$$u_{nk}^{(1)}(-1)=\iint\limits_D g(x,y)(\operatorname{sign}x)X_k^{(1)}(x)Z_n(z)dxdz=g_{nk}^{(1)},$$

$$u_{nk}^{(2)}(1)=\iint\limits_D \gamma(x,y)(\operatorname{sign}x)X_k^{(2)}(x)Z_n(z)dxdz=\gamma_{nk}^{(2)},$$

$$u_{nk}^{(2)}(-1)=\iint\limits_D g(x,y)(\operatorname{sign}x)X_k^{(2)}(x)Z_n(z)dxdz=g_{nk}^{(2)}.$$

Тогда имеем системы для определения коэффициентов $a_{nk}^{(i)},b_{nk}^{(i)}$:

$$\begin{cases} a_{nk}^{(1)}\operatorname{ch}(c_{nk})+b_{nk}^{(1)}\operatorname{sh}(c_{nk})=\gamma_{nk}^{(1)},\\ a_{nk}^{(1)}\cos(c_{nk})-b_{nk}^{(1)}\sin(c_{nk})=g_{nk}^{(1)},\end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} a_{nk}^{(2)}\cos(c_{nk})+b_{nk}^{(2)}\sin(c_{nk})=\gamma_{nk}^{(2)},\\ a_{nk}^{(2)}\operatorname{ch}(c_{nk})-b_{nk}^{(2)}\operatorname{sh}(c_{nk})=g_{nk}^{(2)}.\end{cases} \tag{15}$$

Заметим, что у систем (14), (15) один и тот же определитель:

$$\Delta_{nk}=\cos(c_{nk})\cdot\operatorname{sh}(c_{nk})+\sin(c_{nk})\cdot\operatorname{ch}(c_{nk}). \tag{16}$$

Если при всех $n, k \in \mathbb{N}$ выполняется условие $\Delta_{nk} \neq 0$, то системы (14) и (15) однозначно разрешимы.

Пусть задача (2)–(6) однородная ($g(x,y) = \gamma(x,y) \equiv 0$) и при всех $n, k \in \mathbb{N}$ выполняется условие $\Delta_{nk} \neq 0$, тогда при всех $n, k \in \mathbb{N}$ имеем $u_{nk}^{(1)}(y) = u_{nk}^{(2)}(y) = 0$ при любом $y \in [-1, 1]$, поэтому в силу полноты отмеченной выше системы получим $w(x, y, z) \equiv 0$ в $\overline{Q}$.

Если же при некоторых $n = n_0$ и $k = k_0$ имеем $\Delta_{n_0 k_0} = 0$, то можно убедиться, что существует нетривиальное решение однородной задачи (2)–(6).

Изучим вопрос об обращении в нуль определителя (16). Для этого представим (16) в виде

$$\Delta_{nk} = \sqrt{\operatorname{sh}^2(c_{nk}) + \operatorname{ch}^2(c_{nk})} \sin(c_{nk} + \xi_{nk}),$$

где $\xi_{nk} = \operatorname{arctg}(\operatorname{th}(c_{nk}))$. Тогда $\Delta_{nk} = 0$ при $c_{nk} + \xi_{nk} = \pi l, \ \ l \in \mathbb{N}$.

Теорема (единственности). *Если существует решение задачи* (2) – (6), *то оно единственно, только если при всех* $n, k \in \mathbb{N}$ *выполняется условие* $\Delta_{nk} \neq 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гималтдинова А.А.* Задача Дирихле для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с двумя линиями изменения типа в прямоугольной области // Доклады Академии наук, 2015, Т. 460, №3, С. 1–6.

2. *Сабитов К.Б.* Задача Дирихле для трехмерного уравнения смешанного эллиптико- гиперболического типа // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: Материалы V Международной научной конференции, посвященной 80-летию А.М. Нахушева – Нальчик, 2018. – С. 179-180.

3. *Гималтдинова А.А., Курман К.В.* О полноте одной пары биортогонально сопряженных систем функций // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Серия Физико-математические науки, Т. 19, №1, 2015, С. 7–18.

УДК 517.95

ЗАДАЧА С УСЛОВИЯМИ ПЕРИОДИЧНОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО - ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ДРОБНОГО ПОРЯДКА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Исломов Б.И. [1] **, Убайдуллаев У.Ш.** [2]

[1] *Национальный Университет Узбекистана, г. Ташкент, Узбекистан;*

[2] *Самаркандский Государственный Университет, г. Самарканд, Узбекистан;*

islomovbozor@yandex.com, ulugbekuz88@mail.ru

В данной работе изучается задача с условиями периодичности для уравнения параболо - гиперболического типа с оператором Капуто в прямоугольной области.

Ключевые слова: уравнение параболо - гиперболического типа, оператор дробного порядка, задача с условиями периодичности, критерий единственности, существование, устойчивость.

PROBLEM WITH PERIODICITY CONDITIONS FOR AN EQUATION PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE OF FRACTIONAL ORDER IN A RECTANGULAR DOMAIN

Islomov B. I. [1] **, Ubaydullayev U. Sh.** [2]

[1] *National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;*

[2] *Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan;*

islomovbozor@yandex.com, ulugbekuz88@mail.ru

In this paper, we study a problem with periodicity conditions for an equation of parabolic - hyperbolic type with the Caputo operator in a rectangular domain.

Key words: equation of parabolic-hyperbolic type, fractional order operator, problem with periodicity conditions, uniqueness criterion, existence, stability.

В прямоугольной области $D = \{(x, y) : \quad 0 < x < l, \quad -p < t < q \}$ рассмотрим уравнение

$$0 = Lu(x,t) \equiv \begin{cases} u_{xx} - {}_C D_{0t}^{\alpha} u - \lambda^2 \ u & \text{при} \quad t \geq 0, \\ u_{xx} - u_{tt} - \lambda^2 \ u & \text{при} \quad t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\lambda \geq 0,\ p > 0,\ \ q > 0,\ \ l > 0$ – заданные действительные числа,

$$ {}_cD_{0t}^{\alpha} f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^y (t-z)^{-\alpha} f'(z)dz, & 0 < \alpha < 1, \\ \dfrac{d}{dt} f(t), \quad \alpha = 1 \end{cases} \tag{2} $$

-дифференциальный оператор Капуто порядка α [1].

Заметим, что дифференциальный оператор Капуто определяется через интеграл Римана-Лиувилля дробного порядка следующим образом[1], [2]:

$$ {}_cD_{0t}^{\alpha} u\,(x,t) = I_{0t}^{1-\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{3} $$

где

$$ I_{at}^{\alpha} g\,(t) = \frac{1}{\Gamma\,(\alpha)} \int\limits_a^t (t-z)^{\alpha-1} g\,(z)\,dz \tag{4} $$

- интеграл Римана-Лиувилля дробного порядка $\alpha\ (0 < \alpha < \infty)$ от функции $g\,(y)\,,\ \Gamma\,(\alpha)$ – гамма функция Эйлера[2].

Введем обозначения: $J = \{(x,t):\ 0 < x < l,\ t = 0\}\,,$

$$ D_1 = D \cap\ \{(x,t):\ \ x > 0,\ t > 0\}\,,\ \ D_2 = D \cap\ \{(x,t):\ \ x > 0,\ t < 0\}\,, $$

$$ D = D_1 \cup D_2\, \cup J. $$

В области D исследуем следующую задачу.

Задача. Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:

$$ u(x,t) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D_2 \cup J), \quad t^{1-\alpha} u_t(x,t) \in\ C(D_1 \cup J); \tag{5} $$

$$ u_{tt} \in C(D_2 \cup J),\ \ u_{xx} \in C(D_1 \cup D_2), \quad {}_cD_{0t}^{\alpha} u \in C(D_1 \cup J); \tag{6} $$

$$ Lu(x,t) = 0, \quad (x,t) \in D_1 \cup D_2; \tag{7} $$

$$ u(x,+0) = u(x,-0), \quad (x,0) \in \bar{J}; \tag{8} $$

$$ \lim_{t\to+0} t^{1-\alpha} u_t(x,t) = \lim_{t\to-0} u_t(x,t), \quad (x,0) \in J; \tag{9} $$

$$ u(0,t) = u(l,t), \quad u_x(0,t) = u_x(l,t), \quad -p \leq t \leq q; \tag{10} $$

$$ u\,(x,-p) = \psi\,(x)\,,\ \ 0 < x < l, \tag{11} $$

где $\psi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция.

Заметим, что поставленная задача для уравнения (1) при $\alpha = 1$ изучена в работах [3], [4, с. 95].

Частные решения уравнения (1), не равные нулю в области D будем искать в виде произведения

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

удовлетворяющего граничным условиям (10). Подставляя данное произведение в уравнение (1), относительно $X(x)$ получим

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{12}$$

$$X(0) = X(l), \quad X'(0) = X'(l), \tag{13}$$

где μ– постоянная разделения.

Решением спектральной задачи (12) и (13) является система функций:

$$X_n(x): \quad \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\mu_n x, \quad \sqrt{\frac{2}{l}} cos\mu_n x, \quad \mu_n = \frac{2\pi n}{l}, \quad n \in N, \tag{14}$$

$$X_0(x): \quad \frac{1}{\sqrt{l}}, \quad n = 0, \tag{15}$$

которая полна, ортонормирована и образует базис в пространстве $L_2[0,l]$.

Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (1), (5) – (11). Следуя работам [3, 4] рассмотрим следующие функции:

$$u_n(t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l u(x,t)\, cos\mu_n x dx, \quad n \in N, \tag{16}$$

$$\upsilon_n(t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l u(x,t)\sin\mu_n x dx, \quad n \in N, \tag{17}$$

$$u_0(t) = \frac{1}{\sqrt{l}}\int\limits_0^l u(x,t)\, dx. \tag{18}$$

В силу (16), (17) и (18) с учетом (10) из (1) получаем, что функции $u_n(t)$, $u_0(t)$ и $\upsilon_n(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$ {}_cD_{0t}^{\alpha}u_n(t)+\rho_n^2u_n(t)=0, \quad 0<t<q, \tag{19}$$

$$ u''_n(t)+\rho_n^2u_n(t)=0, \quad -p<t<0, \tag{20}$$

$$ {}_cD_{0t}^{\alpha}u_0(t)+\lambda^2u_0(t)=0, \quad 0<t<q, \tag{21}$$

$$ u''_0(t)+\lambda^2u_0(t)=0, \quad -p<t<0, \tag{22}$$

$$ {}_cD_{0t}^{\alpha}\upsilon_n(t)+\rho_n^2\upsilon_n(t)=0, \quad 0<t<q, \tag{23}$$

$$ \upsilon''_n(t)+\rho_n^2\upsilon_n(t)=0, \quad -p<t<0, \quad \rho_n^2=\mu_n^2+\lambda^2. \tag{24}$$

Дифференциальные уравнения (19) и (20) имеет общие решения

$$ u_n(t)=\begin{cases} c_nE_{1/\alpha}\left(-\rho_n^2t^{\alpha},1\right), & 0<t<q, \\ a_n cos\rho_n t+b_n sin\rho_n t, & -p<t<0, \end{cases} \tag{25}$$

где a_n, b_n, c_n – произвольные постоянные, а $E_{1/\alpha}(z,\mu)$ – известная функция Миттаг-Леффлера, который имеет вид [5]:

$$ E_{1/\alpha}(z,\sigma)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{z^i}{\Gamma(\alpha\ i+\sigma)}, \quad \sigma>0. $$

Подставляя (25) в

$$ u_n(0,-0)=u_n(0,+0), \tag{26}$$

и

$$ \lim_{t\to+0}t^{1-\alpha}u'_n(t)=\lim_{t\to-0}u'_n(t), \tag{27}$$

с учетом (5) и свойства функцию Миттаг-Леффлера [1, С. 13, (1.1.12)], [5]:

$$ E_{1/\alpha}(z)=1+z\,E_{1/\alpha}(z,\alpha+1) \tag{28}$$

имеем

$$ a_n=c_n, \qquad b_n=-\frac{\rho_n}{\Gamma(\alpha)}c_n. \tag{29}$$

В силу (29) из (25) получим

$$ u_n(t)=c_nE_{1/\alpha}\left(-\rho_n^2t^{\alpha},1\right), \quad 0<t<q, \tag{30}$$

$$u_n(t) = \frac{c_n}{\Gamma(\alpha)} \left[\Gamma(\alpha) cos\rho_n t - \rho_n sin\rho_n t \right], \quad -p < t < 0. \tag{31}$$

Для нахождения постоянного c_n воспользуемся граничным условием (11) и формулой (16):

$$u_n(-p) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l u(x, -p) \, cos\mu_n x dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \psi(x) \, cos\mu_n x dx = \psi_n \ . \tag{32}$$

Тогда, удовлетворяя функции (31) граничному условию (32) при условии, что при всех $n \in N$

$$\Delta_p(n) = \Gamma(\alpha) cos\rho_n p + \rho_n sin\rho_n p \neq 0, \tag{33}$$

найдем

$$c_n = \frac{\psi_n \Gamma(\alpha)}{\Delta_p(n)} \tag{34}$$

.

Подставляя (34) в (30) и (31), получим окончательный вид функций

$$u_n(t) = \begin{cases} \frac{\psi_n \Gamma(\alpha)}{\Delta_p(n)} E_{1/\alpha}\left(-\rho_n^2 t^\alpha, 1\right), & 0 < t < q, \\ \frac{\psi_n}{\Delta_p(n)} \left[\Gamma(\alpha) cos\rho_n t - \rho_n sin\rho_n t \right], & -p < t < 0, \quad n \in N. \end{cases} \tag{35}$$

Точно так же, исходя из уравнений (21)-(24) аналогично функций (35), построим функции

$$u_0(t) = \begin{cases} \frac{\psi_0 \Gamma(\alpha)}{\Delta_p(0)} E_{1/\alpha}\left(-\lambda^2 t^\alpha, 1\right), & 0 < t < q, \\ \frac{\psi_0}{\Delta_p(0)} \left[\Gamma(\alpha) cos\lambda t - \lambda sin\lambda t \right], & -p < t < 0, \end{cases} \tag{36}$$

$$\upsilon_n(t) = \begin{cases} \frac{\tilde{\psi}_n \Gamma(\alpha)}{\Delta_p(n)} E_{1/\alpha}\left(-\rho_n^2 t^\alpha, 1\right), & 0 < t < q, \\ \frac{\tilde{\psi}_n}{\Delta_p(n)} \left[\Gamma(\alpha) cos\rho_n t - \rho_n sin\rho_n t \right], & -p < t < 0, \quad n \in N, \end{cases} \tag{37}$$

где

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{l}} \int\limits_0^l \psi(x) \, dx, \qquad \tilde{\psi}_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \int\limits_0^l \psi(x) \, sin\mu_n x dx, \ \ n \in N. \tag{38}$$

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Если существует решение* $u(x,y)$ *поставленной задачи, то оно единственно только тогда, когда выполнены условия (33) при всех* $n \in N$.

Теорема 2. *Если* $\psi(x) \in C^4[0,1]$, $\psi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(1) = 0$, $(i = \overline{0,3})$ *и* $|\Delta_n(p)| \geq C > 0$, $C = const > 0$, *то существует единственное решение* $u(x,y)$ *поставленной задачи и оно определяется рядом*

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{l}}u_0(t) + \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{+\infty}[u_n(t)cos\mu_n x + \upsilon_n(t)sin\mu_n x], \tag{39}$$

где $u_n(t)$, $u_0(t)$ *и* $\upsilon_n(t)$ *– определяются из (35), (36) и (37) соответственно.*

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2, тогда для решения (39) поставленной задачи справедливы оценки:*

$$\|u(x,t)\|_{L_2[0,l]} \leq M_1\|\psi(x)\|_{W_2^1[0,l]},$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\bar{D})} \leq M_2\|\psi(x)\|_{C^2[0,l]},$$

где постоянные M_1 *и* M_2 *не зависят от функции* $\psi(x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Псху А.В.* Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка. Нальчик, 2005. 186 с.

2. *Самко С.Г., Кильбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, Наука и Техника, 1987. 668 с.

3. *Сабитов К.Б., Сидоренко О.Г.* Задача с условиями периодичности для вырождающегося уравнения смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 1. С. 105–113.

4. *Сабитов К.Б.* Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного парaболо-гиперболического типа. М.: Наука. 2016. 272 с.

5. *Джарбашян М.М.* Интегральные преобразования и преставления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.

УДК 517.95; 517.956.6

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ОПЕРАТОРОМ КАПУТО В ТРЕХМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

Исломов Б.И. [1] **, Умарова Г.Б.** [2]
[1] *Национальный Университет Узбекистана, г. Ташкент, Узбекистан;*
[2] *Кокандский Государственый Педагогический Институт, г. Коканд, Узбекистан;*
islomovbozor@yandex.com, guzalxon5111987@gmail.com

В данной работе в бесконечной призматической области изучается задача для уравнения параболо-гиперболического типа с оператором Капуто. Основным методам исследования поставленной задачи является преобразование Фурье. Доказана единственность и существование решения поставленной задачи.

Ключевые слова: уравнение параболо-гиперболического типа с оператором Капуто, преобразование Фурье, регулярное решение, оценка решения, метод Фурье, критерий единственности, существование, устойчивость.

ON ONE BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A MIXED-TYPE EQUATION WITH A KAPUTO OPERATOR IN A THREE-DIMENSIONAL DOMAIN

Islomov B. I. [1] **, Umarova G. B.** [2]
[1] *National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;*
[2] *Kokand State Pedagogical Institute, Kokand, Uzbekistan;*
islomovbozor@yandex.com, guzalxon5111987@gmail.com

In this paper, in an infinite prismatic domain, one problem is formulated and studied for an equation of parabolic-hyperbolic type with the Caputo operator. The main methods for studying the problem posed is the Fourier transform. The uniqueness and existence of a solution to the problem is proved.

Key words: parabolic-hyperbolic equation with the Caputo operator, fourier transform, regular solution, solution estimate, Fourier method, uniqueness criterion, existence, stability.

Трехмерные аналоги задачи Трикоми для уравнения параболо-гиперболического типа с двумя плоскостями изменения типа изучены в работах [1-2].

Заметим, что трехмерные задачи для уравнения параболо-гиперболического типа дробного порядка не изучены.

В настоящей работе изучается аналог задачи Трикоми для уравнения параболо - гиперболического типа дробного порядка с одной плоскости изменение типа в бесконечной призматической области.

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} U_{xx}-{}_cD_{0y}^{\alpha}U+U_{zz}, & x>0,\quad y>0,\quad z\in(-\infty;+\infty),\\ U_{xx}-U_{yy}+U_{zz}, & x>0,\quad y<0,\quad z\in(-\infty;+\infty)\end{cases} \tag{1}$$

в трехмерной области Ω , где

$$\Omega=\{(x,y,z):\ 0<x<1,\ -p<y<q,\ z\in(-\infty,+\infty)\},$$

$p>0,\ q>0$ - заданные действительные числа, а ${}_cD_{0y}^{\alpha}$ - оператор дробного порядка в смысле Капуто[3, стр 92], [4] определяется формулой

$${}_cD_{0y}^{\alpha}\varphi(y)=\begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^y\frac{\varphi'(t)dt}{(y-t)^{\alpha}}, & x>a,\quad 0<\alpha<1,\\ \frac{d\varphi(y)}{dy}, & \alpha=1.\end{cases} \tag{2}$$

Введем обозначения:

$$J=\{(x,y,z):\ 0<x<1,\ y=0,\ z\in(-\infty,+\infty)\},$$

$$\Omega_1=\Omega\ \cap\ \{(x,y,z):\ x>0,\ y>0,\ \ z\in(-\infty,+\infty)\},$$

$$\Omega_2=\Omega\cap\{(x,y,z):\ x>0,\ y<0,\ z\in(-\infty,+\infty)\},\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup J,$$

$$S_0=\{(x,y,z):\ x=0,\ -p<y<q,\quad z\in(-\infty,+\infty)\},$$

$$S_1=\{(x,y,z):\ x=1,\ -p<y<q,\quad z\in(-\infty,+\infty)\},$$

$$S_2=\{(x,y,z):\ 0<x<1,\ y=-p,\ z\in(-\infty,+\infty)\},\ \ D=\Omega\cap\{z=0\},$$

$$D_j=\Omega_j\cap\{z=0\},(j=1,2),\sigma_i=S_i\cap\{z=0\},(i=\overline{0,2}),I=J\cap\{z=0\}.$$

В области Ω исследуем следующую задачу.

Задача T^{α}. Найти в области Ω функцию $U(x,y,z)$, обладающую свойствами: 1) $U(x,y,z)$ функция непрерывна вплоть до границы области Ω; 2) ${}_cD_{0y}^{\alpha}U(x,y,z)\in C(\Omega_1\cup J)$, $U(x,y,z)\in C^1(\Omega)\cap$

$\cap C^{2,2}_{x,z}(\Omega_1) \cap C^{2,2,2}_{x,y,z}(\Omega_2)$, и удовлетворяет уравнению (1) в областях $\Omega_j \; (j=1,2)$; 3)на поверхности J выполняется условия склеивания

$$\lim_{y\to+0} {}_cD^{\alpha}_{0y}U(x,y,z) = \lim_{y\to-0} U_y(x,y,z), \quad (x,0,z)\in J; \tag{3}$$

4) $U(x,y,z)$ удовлетворяет граничным условиям

$$U(x,y,z)|_{S_0} = 0,\; U(x,y,z)|_{S_1} = 0,\; -p \leqslant y \leqslant q, z\in(-\infty,+\infty), \tag{4}$$

$$U(x,y,z)|_{S_2} = \Psi(x,z), \quad 0\leqslant x \leqslant 1\,, \quad z\in(-\infty,+\infty), \tag{5}$$

$$\lim_{|z|\to\infty} U\,(x,y,z) = \lim_{|z|\to\infty} U_x\,(x,y,z) = \lim_{|z|\to\infty} U_y\,(x,y,z) =$$
$$= \lim_{|z|\to\infty} U_z\,(x,y,z) = 0, \tag{6}$$

где $\Psi(x,z)$ - заданные достаточно гладкие функции, причем

$$\lim_{|z|\to\infty} \Psi(x,z) = 0.$$

Решение задачи T^{α} будем искать в классе функций, представимых интегралом Фурье:

$$U(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,y;\lambda)e^{-i\lambda z}d\lambda. \tag{7}$$

В силу (7) уравнение (1) сводятся к следующему уравнению

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - {}_cD^{\alpha}_{0y}u - \lambda^2 u, & x>0, \;\; y>0, \;\; \lambda\in(-\infty;+\infty), \\ u_{xx} - u_{yy} - \lambda^2 u, & x>0, \;\; y<0, \;\; \lambda\in(-\infty;+\infty). \end{cases} \tag{8}$$

Тогда задача T^{α} эквивалентно редуцируется к следующей плоской задаче.

Задача T^{α}_{λ}. Найти решение уравнения (8) из класса

$$W = \left\{u(x,y,\lambda): \;\; u\in C(\overline{D})\cap C^1(D);\right.$$

$$\left. u_{xx}, \;\; {}_cD^{\alpha}_{0y}u \in C(D_1\cup I), \;\; u\in C^{2,2}_{x,y}(D_2)\right\},$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x,y,\lambda)|_{\sigma_0} = 0, \quad u(x,y,\lambda)|_{\sigma_1} = 0, \; -p\leqslant y\leqslant q, \; \lambda\in(-\infty,+\infty), \tag{9}$$

$$u(x,y,\lambda)\big|_{\sigma_2} = \psi(x,\ \lambda), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad \lambda \in (-\infty,+\infty), \tag{10}$$

$$\lim_{y\to+0} {}_cD^{\alpha}_{0y}u(x,y,\lambda) = \lim_{y\to-0} u_y(x,y,\lambda), \quad (x,0,\lambda) \in I, \tag{11}$$

где $\psi\left(x,\lambda\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Psi\left(x,z\right) e^{i\lambda z} dz -$ заданная достаточно гладкая функция.

Используя результаты работ [7, 8] доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Если существует решение $u(x,y,\lambda)$ задачи T^{α}_{λ}, то оно единственно только тогда, когда выполнено условие*

$$\Delta_n(p) \equiv \Gamma(\alpha)cos\ n\pi p + \pi n\, sin\ n\pi p \neq 0 \ \text{ при всех } \ n \in N. \tag{12}$$

Теорема 2. *Если выполнены условия (12) и*

$$\psi_n\left(\lambda\right) = O\left(1\Big/\left|\lambda\right|^k\right), \quad k > 3, \psi_n(\lambda) = \sqrt{2}\int\limits_0^1 \psi(x,\lambda) sin\pi n\, x dx,$$

то $u(x,y,\lambda)$ функция при больших значениях $|\lambda|$ допускает оценку

$$u(x,y,\lambda) = O\left(1\Big/|\lambda|^k\right). \tag{13}$$

Теорема 3. *Если выполнены условия (13), $\psi(x,\lambda) \in C^4\left[0,1\right]$, $\psi^{(i)}(0,\lambda) = \psi^{(i)}(1,\lambda) = 0$, $i = 0,2$ и $|\Delta_n(p)| \geqslant C > 0$, то в области D решение задачи T^{α}_{λ} для уравнения (8) существует и дается формулой*

$$u(x,y;\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U(x,y,z) e^{i\lambda z} dz.$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия (6),(12) и $\Psi(x,z) \equiv 0$, $\forall x \in [0,1]$, $z \in R$, тогда если в области Ω решение задачи T^{α} для уравнения (1) существует, то оно единственно.*

Теорема 5. *Если выполнены условия теоремы 3, то в области Ω решение задачи T^{α} для уравнения (1) существует и находится формулой (7).*

Замечание 1. Оценка (13) обеспечивает существование интеграла (7), дающего решение задачи T^{α}

Замечание 2. Используя свойства преобразования Фурье[5, стр. 537], [6, стр. 36] можно доказать справедливость оценок (6), т.е. $U(x,y,z)$, $U_x(x,y,z)$, $U_y(x,y,z)$, $U_z(x,y,z)$ стремятся к нулю при $|z| \to \infty$ и существует все соответствующие несобственные интегралы.

Замечание 3. Из теоремы 5 следует эквивалентность задач T^{α} и T^{α}_{λ}.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Islomov B.I., Umarova G.B.* Three-dimensional Problems for a Parabolic-Hyperbolic Equation with Two Planes of Change of Type. // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41(9). pp. 1811–1822.

2. *Islomov B.I., Umarova G.B.* A boundary value problem for a mixed equation with three planes of type change in an infinite prismatic domain. // Vestn. KRAUNTS. Fiz.-Mat. Nauki.V.34. No. 1. 19–28(2021).

3. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and applications of fractional differential equations (North-Holland Mathematics Studies, 204). Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.

4. *Псху А.В.* Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка. Нальчик, 2005. 186 с.

5. *Фихтингольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука. Т.3. 1970. 556 с.

6. *Самко С.Г., Кильбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, Наука и Техника, 1987. 668 с.

7. *Сабитов К.Б.* Задача Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Матем. заметки. 2009. Т. 86. Вып. 2. С. 273–279.

8. *Сабитов К.Б.* Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. М.: Наука. 2016. 272 с.

УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Кадиркулов Б.Ж. [1] **, Жалилов М.А.** [2]
[1] *Ташкентский государственный университет востоковедения, г.Ташкент, Узбекистан;*
[2] *Ферганский государственный университет, г.Фергана, Узбекистан;*
kadirkulovbj@gmail.com, alimuhammad9978@mail.ru

Настоящая работа посвящена исследованию вопросов разрешимости одной нелокальной задачи с интегро-дифференциальным условием сопряжения для уравнения смешанного типа четвертого порядка с оператором Капуто. При определенных условиях на заданные параметры и функции, доказаны теоремы единственности и существования решения поставленной задачи.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа; нелокальное уравнение; уравнение с вырождением; нелокальная задача; оператор интегро-дифференцирования; функция Килбаса-Сайго.

A NONLOCAL PROBLEM FOR A DEGENERATE MIXED TYPE EQUATION WITH A FRACTIONAL DERIVATIVE

KadirkulovB.J. [1] **, Jalilov M.A.** [2]
[1] *Tashkent State University of Oriental Studies, Tashkent, Uzbekistan;*
[2] *Fergana State University, Fergana, Uzbekistan;*
kadirkulovbj@gmail.com, alimuhammad9978@mail.ru

The present work is devoted to the study of the solvability questions for a nonlocal problem with an integrodifferential conjugation condition for a fourth-order mixed-type equation with a Kaputo operator. Under certain conditions on the given parameters and functions, we prove the theorems of uniqueness and existence of the solution to the problem.

Key words: mixed type equation; nonlocal equations; degeneration equation; non-local problem; operator integro-differentiation; Kilbas-Saigo function.

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega = \{(x,t) : -1 < x < 1, -a < t < b\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap (t > 0)$, $\Omega_2 = \Omega \cap (t < 0)$, где a, b – положительные действительные числа. В области Ω рассмотрим следующую нелокальную задачу.

Задача А. Требуется найти функцию $u(x,t)$, из класса

$$t^{-\beta}{}_C D^{\alpha}_{0+} u, u_{xxx} \in C(\bar{\Omega}_1), u_{xxxx} \in C(\Omega_1), u \in C^1(\bar{\Omega}_2) \cap C^{4,2}_{x,t}(\Omega_2), \quad (1)$$

удовлетворяющее в области $\Omega_1 \cup \Omega_2$ уравнению

$$0 = \begin{cases} t^{-\beta}{}_C D^{\alpha}_{0t} u(x,t) - u_{xxxx}(x,t) + \varepsilon u_{xxxx}(-x,t), t > 0, \\ \quad u_{tt}(x,t) - u_{xxxx}(x,t) + \varepsilon u_{xxxx}(-x,t), t < 0, \end{cases} \quad (2)$$

краевым условиям

$$u(-1,t) = 0, u(1,t) = 0, u_{xx}(-1,t) = 0, u_{xx}(1,t) = 0, -a \le t \le b, \quad (3)$$

$$u_t(x,-a) = t^{-\beta}{}_C D^{\alpha}_{0+} u(x,b) + \varphi(x), \ 0 \le x \le 1, \quad (4)$$

а также условию склеивания

$$\lim_{t \to +0} t^{-\beta}{}_C D^{\alpha}_{0t} u(x,t) = \lim_{t \to -0} u_t(x,t). \quad (5)$$

Здесь $\varphi(x)$ - заданная функция, $\beta > 0, \varepsilon$ - заданные действительные числа, ${}_C D^{\alpha}_{0t} = J^{1-\alpha}_{0+} \frac{d}{dt}, 0 < \alpha \le 1$ -интегро-дифференциальный оператор Капуто [1].

Отметим, что нелокальные задачи возникают при изучении различных проблем математической биологии, прогнозировании почвенной влаги, проблем физики и плазмы. Более подробную информацию о нелокальных задачах можно найти в монографии [2]. А что касается нелокальных задач для уравнений смешанного типа, то в этом направлении существенные результаты получены проф. К.Б.Сабитовым и его учениками (см. напр. [3-4]). Отметим, что нелокальное условие типа (3) также было заимствовано из работы [3].

2. Единственность и существование задачи А.

Решение задачи А ищем в виде $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$. Подставляя это выражение в уравнение (2) и краевые условия (3), получим следующую спектральную задачу с инволюцией:

$$X^{(IV)}(x) - \varepsilon X^{(IV)}(-x) + \lambda X(x) = 0. X(\pm 1) = 0, X''(\pm 1) = 0.$$

Как следует из результатов работы [5], рассматриваемая задача имеет счетное число собственных значений вида

$$\lambda_{1k} = (1+\varepsilon)k^4\pi^4,\ \lambda_{2k} = (1-\varepsilon)(k-0,5)^4\pi^4, |\varepsilon| < 1, k = 1, 2, ...,$$

а соответствующими собственными функциями являются функции

$$X_{1k}(x) = \sin k\pi x, X_{2k}(x) = \cos(k-0,5)\pi x, k = 1, 2, ..., \tag{6}$$

причем они образуют полную ортонормированную систему в $L_2(-1,1)$.

Пусть $u\,(x,t)$ решение задачи А. Рассмотрим следующие функции

$$u_{ik}(t) = \int\limits_{-1}^{1} u(x,t)X_{ik}(x)dx, i = 1, 2, k = 1, 2, ... \tag{7}$$

Применяя оператор $t^{-\beta}{}_C D_{0t}^{\alpha}$ к обеим частям равенства (7) по t при $t \in (0,b)$, а также дифференцируя два раза при $t \in (-a,0)$ по t , учитывая уравнение (2) относительно функций $u_{1k}(t)$ и $u_{2k}(t)$ получим дифференциальные уравнения

$$t^{-\beta}{}_C D_{0t}^{\alpha} u_{ik}(t) + \lambda_{ik} u_{ik}(t) = 0, t > 0, i = 1, 2, \tag{8}$$

$$u''{}_{ik}(t) + \lambda u_{ik}(t) = 0, t < 0, i = 1, 2. \tag{9}$$

Общие решения уравнений (8) и (9) имеют вид

$$u_{ik}\,(t) = \begin{cases} A_{ik} E_{\alpha,1+\beta/\alpha,\beta/\alpha}(-\lambda_{ik} t^{\alpha+\beta}), t > 0, \\ B_{ik} \sin\sqrt{\lambda_{ik}}t + L_{ik}\cos\sqrt{\lambda_{ik}}t, t < 0, \end{cases} \tag{10}$$

где $A_{ik}, B_{ik}, L_{ik}, i = 1, 2, k = 1, 2, ...$ - произвольные постоянные, а $E_{\alpha,m,l}(z)$ -известная функция Килбаса-Сайго [1].

Из (8), (9), учитывая условия (1), (4) и (5) получим, что функции $u_{1k}(t)$ и $u_{2k}(t)$ должны удовлетворять следующим условиям

$$\lim_{t\to+0} u_{ik}(t) = \lim_{t\to-0} u_{ik}(t),\ \lim_{t\to+0} t^{-\beta}{}_C D_{0+}^{\alpha} u_{ik}(t) = \lim_{t\to-0} u'{}_{ik}(t), \tag{11}$$

$$u'{}_{ik}(-a) = t^{-\beta}{}_C D_{0t}^{\alpha} u_{ik}(b) + \varphi_{ik}, i = 1, 2,\ k = 1, 2, ..., \tag{12}$$

где $\varphi_{ik} = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(x) X_{ik}(x)dx, i = 1, 2, k = 1, 2, ...$

Далее, удовлетворяя функции (10) условиям (11), (12) для нахождения постоянных $A_{ik}, B_{ik}, L_{ik}, i = 1,2$ получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} A_{ik} = L_{ik}, -\lambda_{ik} A_{ik} = \sqrt{\lambda_{ik}} B_{ik}, \\ B_{ik}\sqrt{\lambda_{ik}} \sin\sqrt{\lambda_{ik}} a - L_{ik}\sqrt{\lambda_{ik}} \cos\sqrt{\lambda_{ik}} a + \\ \\ +A_{ik}\lambda_{ik} E_{\alpha,1+\beta/\alpha,\beta/\alpha}(-\lambda_{ik} b^{\alpha+\beta}) = \varphi_{ik}. \end{cases}$$

Данная система имеет единственное решение

$$L_{ik} = A_{ik}, B_{ik} = -\sqrt{\lambda_{ik}} A_{ki},\ A_{ik} = \frac{\varphi_{ik}}{\sqrt{\lambda_{ik}}\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)},$$

при условии, что при всех $k = 1, 2...$ и $i = 1, 2$ имеет место

$$\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon) = \sin\sqrt{\lambda_{ik}} a - \sqrt{\lambda_{ik}} \cos\sqrt{\lambda_{ik}} a +$$

$$+\sqrt{\lambda_{ik}} E_{\alpha,1+\beta/\alpha,\beta/\alpha}(-\lambda_{ik} b^{\alpha+\beta}) \neq 0. \tag{13}$$

Подставляя найденные решения в (10), окончательно имеем

$$u_{ik}(t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_{ik}}{\sqrt{\lambda_{ik}}\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)} E_{\alpha,1+\beta/\alpha,\beta/\alpha}(-\lambda_{ik} t^{\alpha+\beta})\, t > 0, \\ \dfrac{\varphi_{ik}}{\sqrt{\lambda_{ik}}\Delta_{ik}(a,b,\varepsilon)} \left(\cos\sqrt{\lambda_{ik}} t - \sqrt{\lambda_{ik}} \sin\sqrt{\lambda_{ik}} t\right), t \leq 0. \end{cases} \tag{14}$$

С помощью (14) при выполнении условия (13) легко доказать единственность решения рассматриваемой задачи. Действительно, пусть $u(x,t)$ есть решение однородной задачи A в области Ω. Так как $\varphi(x) = 0$, тогда $\varphi_{ik} = 0,\ i = 1,2$ и из формул (7) и (14) следует, что

$$\int_{-1}^{1} u(x,t) X_{ik}(x) dx = 0, t \in [-a,b],\ i = 1,2,\ k = 1,2,....$$

Далее, учитывая полноту системы (6) в пространстве $L_2(-1,1)$ заключаем, что $u(x,t) = 0$ почти всюду на $[-1,1]$ при любом $t \in [-a,b]$. Поскольку $u(x,t) \in C(\bar{\Omega})$, то $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$, то есть задача A в рассматриваемой классе имеет единственное решение.

Таким образом, имеет место следующая теорема:

Теорема 1. Если существует решение задачи А, то оно единственно только и только тогда, когда выполнены условия (13) при всех $k = 1, 2, \ldots$.

Лемма 3. Пусть b - любое положительное действительное число, а числа a и ε такие, что $\sqrt{1 \pm \varepsilon} \cdot a \cdot \pi$ - рациональное число. Тогда, при больших значениях k существует положительная постоянная $M_i, i = 1, 2$ такая, что справедлива оценка

$$|\Delta_{ik}(a, b, \varepsilon)| \geq M_i k^2 > 0. \tag{15}$$

Теорема 2. Пусть функция $\varphi(x)$ удовлетворяет следующим условиям

$$\varphi(x) \in C^3[-1, 1], \varphi^{(s)}(-1) = 0, \varphi^{(s)}(1) = 0, s = 0, 2.$$

Тогда: 1) задача А в области Ω однозначно разрешима только тогда, когда выполняется условие (13) и (15).

2) если для некоторых a, b, ε , $i = i_0$ и $k = k_1, ..., k_s$ выполняется условие $\Delta_{ik}(a, b, \varepsilon) = 0$, то задача А разрешима только тогда, когда выполняются условия ортогональности

$$\varphi_{i_0 k} = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(x) X_{i_0 k} dx = 0, k = k_1, ...k_s.$$

Теорема 2 доказывается с применением леммы 2 и 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.*Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam. – 2006. 523 p.

2. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных.-М.: Наука, 2006. - 287 с.

3. *Sabitov K. B. Yunusova G. R.* Inverse Problem for an Equation of Parabolic-Hyperbolic Type with a Nonlocal Boundary Condition. Differential Equations, 2012, Vol. 48, No. 2, pp. 246–254.

4. *Сабитов К.Б., Сидоров С.Н.* Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием //Известия Вузов. Математика. 2015. № 1. С. 46–59.

5. *Kadirkulov B.J., Jalilov M.A.* On a boundary value problem for a nonlocal mixed-type equation with the Hilfer operator. Abstracts of the Uzbekistan-Malaysia international online conference computational models and technologies. August 24-25, 2020.

УДК 517.956.6

ЗАДАЧА ТИПА БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ С ДАННЫМИ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ

Мирсабуров М., Аллакова Ш.И.
Термезский государственный университет, г.Термез, Узбекистан;
mirsaburov@mail.ru, shaxnoza.allakova@mail.ru

Аннотация: Работа посвящена исследованию в бесконечной области задачи с локальными и нелокальными условиями на характеристике для уравнения смешанного типа.
ключевые слова: сингулярный коэффициент, внутренная характеристика, недостаюшее условия Трикоми, условие Бицадзе-Самарского.

BITSADZE-SAMARSKI-TYPE PROBLEM FOR HELERSTEDT EQUATION WITH SINGULAR COEFFICIENTS IN AN UNLIMITED DOMAIN WITH DATA ON PARALLEL CHARACTERISTICS

Mirsaburov.M., Allakova.Sh.I.
Termez state university, Termez, Uzbekistan;
mirsaburov@mail.ru, shaxnoza.allakova@mail.ru

Annotation: The work is devoted to the study in an infinite domain of the problem with local and nonlocal conditions on the characteristic for the equation of mixed type
keywords: singular coefficient, internal characteristic, missing Tricomi condition, Bitsadze-Samarsky condition.

1. Постановка задачи TBS (Трикоми, Бицадзе- Самарского)

Пусть $D = D^{+} \bigcup D^{-} \bigcup I$ -бесконечная область комплексной плоскости $C = \{z = x + iy\}$, где D^{+} -полуплоскость $y > 0, D^{-}$ -конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками уравнения

$$(signy)|y|^{m}u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{|y|^{1-\frac{m}{2}}}u_x + \frac{\beta_0}{y}u_y = 0, \qquad (1)$$

исходяшими из точек $A(-1,0), B(1,0)$ и отрезком AB прямой $y = 0, I = \{(x,y) : 1 < x < 1, y = 0\}$. В уравнение (1) предполагается, что m, α_0 и β_0 некоторые действительные числа, удовлетворяюшие условиям $m > 0, |\alpha_0| < (m+2)/2, -m/2 < \beta_0 < 1.$

Пусть D_R^{+} -конечная область, отсекаемая от области D^{+} дугой $A_RB_R, A_R(-R,0), B_R(R,0)$ нормальной кривой

$$x^2 + \frac{4y^{m+2}}{(m+2)^2} = R^2, -R \leq x \leq R, 0 \leq y \leq \left(\frac{(m+2)R}{2}\right)^{\frac{2}{m+2}}.$$

Введем обозначения: $\overline{I}_1 = \{(x,y) : -\infty < x \leq -1, y = 0\}$, $\overline{I}_2 = \{(x,y) : 1 \leq x < +\infty, y = 0\}$ $C_0(C_1)$ -точки пересечения характеристики $AC(BC)$ с характеристикой, исходяшей из точки $E(c,0)$, где $c \in I$ -произвольное фиксированное число, $D_R = D_R^{+} \bigcup D^{-}, D_R$ -подобласть неограниченной области D.

В настоящей работе для неограниченной области D рассматривается обобшение задачи Трикоми [1, с.125] в случае, когда граничная характеристика AC произвольным образом разбивается на две части: AC_0 и C_0C, и на первой части AC_0 задается локальное условие Трикоми, а на второй части C_0C, и параллельной ей внутренной характеристика EC_1, задется нелокальное условие Бицадзе- Самарского [2],[3].

Задача TBS (Трикоми, Бицадзе- Самарского). Найти функцию $u(x,y)$ со свойствами:

1) функция $u(x,y)$ непрерывна в любой подобласти $\overline{D}_R$ неограниченной области D;

2) $u(x,y)$ принадлежит пространству $C^2(D^{+})$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

3) $u(x,y)$ является обобшенным решением класса R_1 ([1],с.104) в области $D^{-} \backslash (EC_0 \bigcup EC_1)$;

4) на интервале вырождения I имеет место следуюшее условие

сопряжения:

$$\lim_{y\longrightarrow -0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{y\to +0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y},\quad x\in I\backslash\{c\},\tag{2}$$

причем эти пределы при $x=\pm 1$, $x=c$, могут иметь особенности порядка ниже $1-\alpha-\beta$, где $\alpha=\frac{m+2(\beta_0+\alpha_0)}{2(m+2)},\beta=\frac{m+2(\beta_0-\alpha_0)}{2(m+2)}$;

5) выполняется равенство

$$\lim_{R\to\infty}u(x,y)=0,\quad y>0,\tag{3}$$

где $R^2=x^2+\frac{4y^{m+2}}{(m+2)^2}$;

6) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_{y=0}=\tau_i(x),\forall x\in I_i,i=1,2,\tag{4}$$

$$u(x,y)|_{AC_0}=\psi(x),-1\leq x\leq (c-1)/2,\tag{5}$$

$$D^{1-\beta}_{c,x}u[\theta(x)]=\mu(x)(x-c)^{\alpha}D^{1-\beta}_{c,x}u[\theta^*(x)]+\rho(x),\quad c<x<1,\tag{6}$$

где $\theta(x_0)=\frac{x_0-1}{2}-i(\frac{m+2}{4}(x_0+1))^{\frac{2}{m+2}}$, $\theta^*(x_0)=\frac{x_0+c}{2}-i(\frac{m+2}{4}(x_0-c))^{\frac{2}{m+2}}$, аффиксы точек пересечения характеристик $\mathrm{C_0C}$ и EC_1 с характеристиками, исходяшими из точки $M(x_0,0),x_0\in\overline{I},u[\theta(x)]=u[Re\theta(x),Im\theta(x)],\tau_1(x),\tau_2(x),\psi(x),\mu(x),\rho(x)$ - заданные функции, причем $\psi(-1)=0,\rho(c)=0,\psi\left(fracc-12\right)=0,\psi(x)\in C\left[-1,\frac{c-1}{2}\right]\bigcap C^{1,\gamma_0}\left(-1,\frac{c-1}{2}\right)\mu(x),\rho(x)\in C[c,1]\bigcap C^{1,\gamma_0}(c,1)$ функции $\tau_i(x)=(1-x^2)\overline{\tau}_i(x)$ и непрерывно дифференцируем на любых отрезках $[-N,-1],[1,N]$, для достаточно больших $|x|$ удовлетворяет неравенству $|\tau_i(x)|\leq M|x|^{-\delta_0}$, γ_0,δ_0 -положительные постоянные.

Задача TBS отличается от задачи Трикоми лишь условием Бицадзе- Самарского (6), которое нелокально связывает значения производной дробного порядка от искомой функции $u(x,y)$ на параллельных характеристиках $C_0C\subset AC$, и EC_1 [2] отметим, что задача TBS при $\mu=0$ переходит в задачу Трикоми [1,с-125].

В силу равенства

$$D^{1-\beta}_{c,x}u[\theta(x)]=D^{1-\beta}_{-1,x}u[\theta(x)]-\frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{d}{dx}\int\limits_{-1}^{c}\frac{u\left[\theta(t)\right]dt}{(x-t)^{1-\beta}},$$

условие (6) преобразуем к виду

$$D_{-1,x}^{1-\beta}u\left[\theta(x)\right]=\mu(x)(1+x)^{\alpha}D_{c,x}^{1-\beta}u\left[\theta^{*}(x)\right]+\rho_{1}(x),\quad c\leq x\leq 1,\quad (7)$$

где $u[\theta(t)]=\psi((x-1)/2)$ -известная велегина при $x\in(-1,c)$

Таким образом, краевое условие (6) может быть заменено условием (7). Решение уравнения (1) в области D^{-} удовлетворяюшие видоизмененным начальным данным Коши:

$$u(x,-0)=\tau(x),x\in I;\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_{0}}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu(x),x\in I,$$

дается формулой Дарбу[1,с.36], [5,]:

$$u(x,y)=\gamma_{1}\int_{-1}^{1}\tau\left[x+\frac{2t}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right](1-t)^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}dt+$$

$$+\gamma_{2}|y|^{1-\beta_{0}}\int_{-1}^{1}\nu\left[x+\frac{2t}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right](1-t)^{-\beta}(1+t)^{-\beta}dt,\qquad (8)$$

где

$$\gamma_{1}=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\cdot 2^{1-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)},\gamma_{2}=-\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)\cdot 2^{\alpha+\beta-1}}{(1-\beta_{0})\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}.$$

В силу формулы Дарбу нетрудно вычислить, что

$$u\left[\theta^{*}(x)\right]=\gamma_{1}\Gamma(\alpha)\left((x-c)/2\right)^{1-\alpha-\beta}D_{c,x}^{-\alpha}(x-c)^{\beta-1}\tau(x)+$$

$$+\gamma_{2}\Gamma(1-\beta)\left((m+2)/2\right)^{1-\alpha-\beta}D_{c,x}^{\beta-1}(x-c)^{-\alpha}\nu(x),c\leq x\leq 1.\qquad (9)$$

К равенству (8) применая оператор дробного дифференцирования $D_{c,x}^{1-\beta}u\left[\theta^{*}(x)\right]$ получим

$$D_{c,x}^{1-\beta}u\left[\theta^{*}(x)\right]=\gamma_{1}\Gamma(\alpha)2^{\alpha+\beta-1}(x-c)^{-\alpha}D_{c,x}^{1-\alpha-\beta}\tau(x)+$$

$$+\gamma_{2}\Gamma(1-\beta)\left((m+2)/2\right)^{1-\alpha-\beta}(x-c)^{-\alpha}\nu(x),\qquad (10)$$

согласно формулы Дарбу и равенства (9) из краевых условий(5) и (6) соответственно имеем.

$$\nu(x)=\gamma D_{-1,x}^{1-\alpha-\beta}\tau(x)+\Psi(x),x\in(-1,c);\qquad (11)$$

$$\nu(x) = \gamma\omega(x)\left\{D_{-1,x}^{1-\alpha-\beta}\tau(x) - \mu(x)(1+x)^{\alpha} D_{c,x}^{1-\alpha-\beta}\tau(x)\right\} + \\ +\rho_2(x), \quad x \in (c, 1), \tag{12}$$

$$\omega(x) = \frac{1}{1-\mu(x)(1+x)^{\alpha}}, \gamma = \frac{2\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha-\beta)\Gamma(\beta)} \cdot \left(\frac{m+2}{4}\right)^{\alpha+\beta},$$

где $\psi(x)$ и $\rho_2(x)$ – известные функции. Соотношения (11) и (12) являются первыми функциональными соотношениями между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$ привнесенными соответственно на интервалы $(-1, c)$ и $(c, 1)$ из области D^-.

2. Единственность решения задачи TBS.

Теорема. *Пусть* $\psi(x) \equiv 0$, $\rho(x) \equiv 0$, $\mu(x) \leq 0$, *тогда задача TH однозначно разрешима.*

Доказательство теоремы проводиться методом работы [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа, 1985. 304 с.

2. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобшениях линейным эллиптических краевых задач // ДАН СССР. 1969. Т. 185. №4. С. 739–740.

3. Мирсабуров М.М. Краевая задача для одного класса уравнений смешанного типа с условием Бицадзе-Самарского на параллельных характеристиках // Дифференц уравнения. 2001.Т. 37. №9. С. 1281–1284.

УДК 517.956.6

ЗАДАЧА С АНАЛОГОМ УСЛОВИЯ ФРАНКЛЯ НА ОТРЕЗКЕ ВЫРОЖДЕНИЯ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Мирсабуров М., Эргашева С.Б.

Термезский государственный университет, г.Термез, Узбекистан; mirsaburov@mail.ru, sarvinozergasheva@96mail.ru

Для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения с сингулярным коэффициентом исследована задача с аналогом условия Франкля на отрезке вырождения.

Ключевые слова: вырождающееся внутри области гиперболическое уравнение, условие Франкля, сингулярный коэффициент, полная ортогональная система функций, сингулярное интегральное уравнение, уравнение Винера-Хопфа, индекс.

PROBLEM WITH ANALOG OF FRANKL'S CONDITION ON THE INTERCEPT OF DEGENERATION FOR THE HYPERBOLIC EQUATION

Mirsaburov.M., Ergasheva.S.B.
Termez state university, Termez, Uzbekistan;
mirsaburov@mail.ru, sarvinozergasheva@96mail.ru

For a hyperbolic equation degenerating inside the domain with a singular coefficient, a problem with an analogue of the Frankl condition on the segment of degeneracy is investigated.

Keywords: the hyperbolic equation degenerating inside the domain, Frankl's condition, singular coefficient, complete orthogonal system of functions, singular integral equation, Wiener-Hopf equation, index.

I. Постановка задачи A.

Пуст Ω характеристический четырехугольник комплексной плоскости $C : z = x + iy$, ограниченная характеристиками AC_1, BC_1, AC_2, BC_2, где $A(-1,0), B(1,0), C_1\left(0, ((m+2)/2)^{2/(m+2)}\right)$, $C_2\left(0, -((m+2)/2)^{2/(m+2)}\right)$ уравнения

$$-|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \alpha_0 |y|^{(m-2)/2} u_x + (\beta_0/y) u_y = 0, \qquad (1)$$

где m, α_0, β_0 некоторые постоянные удовлетворяшие условиям $m > 0, -m/2 < \beta_0 < 1, -(m+2)/2 < \alpha_0 < (m+2)/2$. $[1-6]$

Корректность постановки краевых задач для уравнения (1) существенно зависит от ее числовых параметров α_0 и β_0 коэффициентов при младших членах уравнения, на плоскости параметров $\alpha_0 O \beta_0$

рассмотрим треугольник $A_0B_0C_0$ ограниченной прямыми

$$A_0C_0 : \beta_0 + \alpha_0 = -m/2; \; B_0C_0 : \beta_0 - \alpha_0 = -m/2; \; A_0B_0 : \beta_0 = 1.$$

Пусть $P(\alpha_0, \beta_0) \in \Delta A_0B_0C_0$ т.е. $0 < \alpha, \beta < 1$, $\alpha + \beta < 1$, где $\alpha = (m + 2(\beta_0 + \alpha_0))/2(m+2)$, $\beta = (m + 2(\beta_0 - \alpha_0))/2(m+2)$.

Обозначим через Ω_1 и Ω_2 части области Ω лежашие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, и через A_0 и B_0 соответственно точки пересечения характеристик AC_2 и BC_2 с характеристикой исходяшей из точки $E(c, 0)$, где $c \in J = (-1, 1)$ -интервал оси $y = 0$.

Пусть линейная функция $p(x) = \delta - kx$, где $k = (1-c)/(1+c)$, $\delta = 2c/(1+c)$ отображает множество точек отрезка $[-1, c]$ на множество точек отрезка $[c, 1]$ причем $p(-1) = 1, p(c) = c$.

Настоящая работа посвящена исследованию корректности задачи в области Ω для вырождаюшегося внутри области гиперболического уравнения (1), когда граничная характеристика AC_2 области Ω_2 произвольным образом разбивается на два куска AA_0 и A_0C_2 и на первом куске $AA_0 \subset AC_2$ задается значения искомой функции, а второй кусок $A_0C_2 \subset AC_2$ освобождена от краевого условия и это недостающие краевое условие заменено аналогом условия Франкля на отрезке вырождения AB.

Постановка задачи A**.** Требуется найти в области Ω функцию $u(x, y) \in C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $u(x, y) \in C^2(\Omega_k)$, $k = 1, 2$ и удовлетворяет уравнению (1) в этих областях;

2) на интервале вырождения выполняется условие сопряжения

$$\lim_{y \to -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y \to +0} y^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in (-1, 1)/\{c\}, \tag{2}$$

причем эти пределы при $x = \pm 1, x = c$ могут иметь особенности порядка ниже $1 - \alpha - \beta = (m + 2\beta_0)/2(m+2)$;

3)
$$u(x, y)\mid_{BC_1} = \psi_1(x), \quad 0 \le x \le 1; \tag{3}$$

4)
$$u(x, y)\mid_{AA_0} = \psi_2(x), \quad -1 \le x \le (c-1)/2; \tag{4}$$

5)
$$u(x, 0) - \mu u(p(x), 0) = f(x), \; -1 \le x \le c, \tag{5}$$

где $\mu = const$,

$$\psi_1(x) \in C[0,1] \cap C^3(0,1),$$

$$\psi_2(x) \in C[-1,(c-1)/2] \cap C^3(-1,(c-1)/2),$$

$$f(x) \in C[-1,c] \cap C^3(-1,c),$$

$$\psi_1(1) = 0,\ \psi_2(-1) = 0,\ f(c) = 0.$$

Условие (5) является аналогом условия Франкля [7] на отрезке вырождения AB .

В силу обозначения $u(x,0) = \tau(x)$ условие (5) запишем в виде

$$\tau(x) - \mu\tau(p(x)) = f(x),\ x \in [-1,c]. \tag{5*}$$

Решение уравнения (1) в области $\Omega_k \quad (k = 1,2)$, удовлетворяющее видоизмененным условиям Коши:

$$\lim_{|y|\to 0} u(x;y) = \tau(x),\ x \in \bar{J};\ \lim_{|y|\to 0} |y|^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x),\ x \in J,$$

имеет вид $[2,4,5,6]$

$$u(x,y) = \gamma_1 \int_{-1}^{1} \tau\left[x + \frac{2t}{m+2}|y|^{\frac{m+2}{2}}\right]\ (1+t)^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}dt + (-1)^k\gamma_2|y|^{1-\beta_0}\cdot$$

$$\cdot\int_{-1}^{1} \nu\left[x + \frac{2t}{m+2}|y|^{\frac{m+2}{2}}\right]\ (1+t)^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}dt, \tag{6}$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}2^{1-\alpha-\beta},\ \gamma_1 = -\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{(1-\beta_0)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}2^{\alpha+\beta-1}.$$

В силу (6) из краевого условия (3) имеем

$$\gamma_1\left(\frac{1-x}{2}\right)^{1-\alpha-\beta}\int_x^1 \frac{\tau(s)(1-s)^{\alpha-1}}{(s-x)^{1-\beta}}ds - \gamma_2\left(\frac{m+2}{2}\right)^{1-\alpha-\beta}\cdot$$

$$\cdot\int_x^1 \frac{\nu(s)(1-s)^{-\beta}}{(s-x)^{\alpha}}ds = \Psi_1\left(\frac{1+x}{2}\right),\quad x \in [-1,1], \tag{7}$$

или

$$\nu(x) = -\gamma D_{x,1}^{1-\alpha-\beta}\tau(x) + \Psi_1(x),\ x \in (-1,1), \tag{8}$$

где

$$\gamma = \frac{2\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha-\beta)}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\alpha+\beta},$$

$$\Psi_1(x) = -\frac{(2/(m+2))^{1-\alpha-\beta}}{\gamma_2\Gamma(1-\alpha)}(1-x)^{\beta} D_{x,1}^{1-\alpha}\psi_1\left(\frac{1+x}{2}\right).$$

Соотношение (8) является первым функциональным соотношением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$ привнесенным на интервал $(-1,1)$ из области Ω_1 .

Теперь в силу (6) из краевого условия (4) получим

$$\nu(x) = \gamma D_{-1,x}^{1-\alpha-\beta}\tau(x) + \Psi_2(x), x \in (-1,c), \tag{9}$$

где

$$\Psi_2(x) = \frac{(2/(m+2))^{1-\alpha-\beta}}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}(1+x)^{\alpha} D_{-1,x}^{1-\beta}\psi_2\left(\frac{x-1}{2}\right).$$

Соотношение (9) является вторым функциональным соотношением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$ привнесенным на интервал $(-1,c)$ из области Ω_2 .

В (8) и (9) $D_{x,1}^{1-\alpha-\beta}$, $D_{-1,x}^{1-\alpha-\beta}-$ есть операторы дробного дифференцирования $[8, c.16]$.

Дальнейшее исследование задачи A проводиться методом работы [7]

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981. 484 с.

2. *Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.* О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений вырождаюшегося внутри области. // Дифференц. уравнения.1981.т.17.№ 9.С. 1281–1284.

3. *Нахушев А.М.* К теории краевых задач для вырождаюшихся гиперболических уравнений. // Сообщения АН.ГССР.,1975,т.77.№ 3.С. 545–548.

4. *Кумыкова С.К., Нахушева Ф.Б.* Об одной краевой задаче для гиперболического урвнения вырождаюшегося внутри области. // Дифференц. уравнения.1978.т.14.№ 1.С. 50–64.

5. *Кумыкова С.К.* Краевая задача со смещением для вырождаюшегося внутри области гиперболического уравнения. // Дифференц. уравнения.1980.т.16.№ 1.С. 93–104.

6. *Балкизов Ж.В.* Первая краевая задача для вырождаюшегося внутри области гиперболического уравнения. // Владикавказ. матем.журнал. 2016.т.18.№ 2.С. 19–30.

7. *Мирсабуров М* Краевая задача для одного класса уравнений смешанного типа с условием Бицадзе-Самарского на параллельных характеристиках. // Дифференц. уравнения.2001.т.37.№ 9.С. 1281–1284.

8. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа М., 1985,-304с.

УДК 517.956

ЗАДАЧА ТИПА БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Мирсабурова Г.М.

Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами, Ташкент;

mirsaburov@mail.ru

В характеристическом треугольнике для вырождающегося гиперболического уравнения с сингулярным коэффициентом доказана корректность задачи с типа Бицадзе-Самарского заданием условий на граничной и параллельных ей внутренних характеристиках.

Ключевые слова: вырождающееся гиперболическое уравнение с сингулярным коэффициентом, задача типа Бицадзе-Самарского, существование, единственность.

PROBLEM WITH AN ANALOGUE OF THE BITSADZE-SAMARASKII CONDITION FOR ONE CLASS OF DEGENERATE HYPERBOLIC EQUATION

Mirsaburova G.M.
Tashkent state pedagogical university named after Nizami, Tashkent; mirsaburov@mail.ru

In the characteristic triangle for a degenerate hyperbolic equation with a singular coefficient, the correctness of the problem with the Bitsadze-Samarskii type is proved by specifying conditions on the boundary and parallel internal characteristics, existence, uniqueness.

Key words: degenerate hyperbolic equation with singular coefficient, Bitsadze-Samarskii type problem.

Введение. Пусть $D-$ конечная односвязная область полуплоскости $y<0$ ограниченная отрезком AB оси $y=0$, характеристиками AC и BC уравнения

$$-(-y)^m u_{xx} + u_{yy} - (m/2y)u_y = 0, \tag{1}$$

где постоянная $m>0$, $A=A(-1,0)$, $B=B(1,0)$.

На отрезке AB рассмотрим точки $E_1 = E_1(c_1,0)$ и $E_2 = E_2(c_2,0)$,
$-1<c_1<c_2<1$.

На отрезке $[-1,1]-$ оси $y=0$ введем монотонно возрастающие функции $p_k(x)\in C^1[-1,1]$ отображаюший отрезок $[-1,1]$ соответственно, на отрезки $[c_k,1]$, причем $p_k(x)>x$ при $x\in[-1,1)$ и $p_k(-1)=c_k$, $p_k(1)=1$. В качестве примера такой функции приведем линейные функции $p_k(x)=b_kx+a_k$, где $a_k=(1+c_k)/2$, $b_k=(1-c_k)/2$ причем $a_k+b_k=1$, $a_k-b_k=c_k$ через $\theta(x_0)$ и $\theta_k(p_k(x_0))$ соответственно обозначим аффиксы точек пересечения характеристик

$$AC:\ x-(2/(m+2))(-y)^{(m+2)/2}=-1,$$

$$E_kB_k: x-(2/(m+2))(-y)^{(m+2)/2}=c_k,$$

где $B_k\in BC$, $k=1,2$ с характеристиками из семейства BC выходящих из точек $(x_0,0)$, $(p_k(x_0),0)$

$$\theta(x_0)=\frac{x_0-1}{2}-i\left[\frac{m+2}{4}(1+x_0)\right]^{\frac{2}{m+2}},$$

$$\theta_k(p_k(x_0)) = \frac{p_k(x_0)+c_k}{2} - i\left[\frac{m+2}{4}(p_k(x_0)-c_k)\right]^{\frac{2}{m+2}}, \; k=1,2. \quad (2)$$

В работе А.В. Бицадзе, А.А. Самарский [1] для уравнение Лапласа в прямоугольной области впервые была сформулирована и исследована задача с нелокальным условием связывающим значения искомого решения на части границы области со значением на внутренней прямой в точках которой искомая функция $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению. Настоящая работа посвящина исследованию для вырождающегося гиперболического уравнения задачи с аналогом условия Бицадзе–Самарского, который связывает значения искомого решения на граничной характеристике и параллельной ей на двух внутренних характеристиках.

Задача A. *В области* D *найти регулярное решение* $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$ *уравнения (1) удовлетворяющее следующим условиям:*

$$u(x,0) = \tau(x), \quad x \in [-1,1], \quad (3)$$

$$\frac{d}{dx}u[\theta(x)] = \mu_1(x)\frac{d}{dx}u[\theta_1(p_1(x))] + \mu_2(x)\frac{d}{dx}u[\theta_2(p_2(x))] + \rho(x), \; x \in [-1,1], \quad (4)$$

где заданные функции $\tau(x),\ \mu_1(x),\ \mu_2(x),\ \rho(x) \in C[-1,1] \cap C^2(-1,1)$,

Основным результатом работы является

Теорема. *Задача* A *при выполнение условия*

$$\delta_1 + \delta_2 < 1$$

однозначно разрешима, где $\delta_k = \max\limits_{x\in[-1,1]} |\mu_k(x) p_k^{'}(x)|, \; k = 1,2$.

Теорема доказывается методом работы [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А.В., Самарский А.А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // ДАН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 73–740.

2. *Бицадзе А.В., Салахитдинов М.С.* К теории уравнений смешанно-составного типа // Сибирский математический журнал. 1961. Т. 2. № 1. С. 7–19.

УДК 517.95

ЗАДАЧА ГЕЛЛЕРСТЕДТА С ДАННЫМИ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА–БИЦАДЗЕ

Моисеев Е.И.
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия;
emoise@yandex.ru

Исследуется задача Геллерстедта для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с граничными условиями, заданными на параллельных характеристиках в гиперболической области уравнения. Рассмотрены три различных вида условий на линии изменения типа, доказаны теоремы о существовании и единственности решений соответствующих задач.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, задача Геллерстедта, существование, единственность.

THE HELLERSTEDT PROBLEM WITH DATA ON PARALLEL CHARACTERISTICS FOR THE LAVRENT'EV–BITSADZE EQUATION

Moiseev E.I.
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;
emoise@yandex.ru

We study the Gellerstedt problem for the Lavrent'ev–Bitsadze equation with boundary conditions given on parallel characteristics in the hyperbolic domain of the equation. Three different types of conditions on the line of change of type are considered, theorems on the existence and uniqueness of solutions of the corresponding problems are proved.

Key words: mixed type equation, Gellerstedt problem, existence, uniqueness.

В докладе приводятся результаты по изучению задач Геллерстедта для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с граничными условиями, заданными на параллельных характеристиках в гиперболической области уравнения. Рассмотрены три различных вида условий на линии изменения типа и в зависимости от этого получены теоремы о существовании и единственности решений соответствующих задач. Эти результаты изложены в работах [1, 2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Моисеев Е.И., Моисеев Т.Е., Холомеева А.А.* О разрешимости задач Геллерстедта с данными на параллельных характеристиках // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 10. С. 1379.

2. *Моисеев Е.И., Моисеев Т.Е., Холомеева А.А.* Базисность системы собственных функций задачи Геллерстедта в эллиптической части области // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 3. С. 419.

УДК 517.95

SINGULAR SOLUTIONS OF PROTTER-MORAWETZ PROBLEM FOR A CLASS OF 3-D PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATIONS

Popivanov N.I. [1], **Hristov Ts.D.** [2], **Scherer R.** [3]

[1] *Institute of Information and Communication Technologies, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria;*

[1,2] *Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University "St. Kliment Ohridski", Sofia, Bulgaria;*

[3] *Institute for Applied and Numerical Mathematics, Karlsruhe Institute of Technology, Karlsruhe, Germany;*

nedyu@parallel.bas.bg, nedyu.popivanov2@partner.kit.edu, tsvetan@fmi.uni-sofia.bg, rudolf.scherer@kit.edu

Some three-dimensional ill-posed boundary-value problems (BVPs) for weakly hyperbolic equations of Tricomi type with lower order terms are considered. They have been studied by many authors, but a general understanding of the situation is still not at hand even more sixty years after their statement given by Murray Protter. These problems are 3-D analogues of classical BVPs on the plane, which are well-posed under so called Protter condition. Unexpectedly, unlike the two-dimensional variants, Protter-Morawetz problems are not correctly set. We give three-dimensional analogue of the classical plane Protter condition, and prove *that under this condition the generalized solution exists and it is uniquely determined, but it may have a strong singularity at an isolated boundary point. Further, we find additional conditions for the lower order terms and appropriate smooth right-hand sides, for which the corresponding generalized solutions have strong power-type singularities.*

Key words: equation of mixed parabolic-hyperbolic type, generalized solution, uniqueness, existence, singular solutions.

Acknowledgments. The work of N. Popivanov has been partially supported by Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, under Grant "Actual problems of the theory of equations of mixed type".

УДК 517.95

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Пятков С.Г.
Югорский государственный университет, г. Ханты-Мансийск, Россия;
pyatkovsg@gmail.com

Мы показываем разрешимость широкого класса краевых задач для смешанного типа высокого порядка, включая в том числе нелокальные условия общего вида. Результаты основаны на оценках резольвенты для обыкновенных дифференциальных операторов со старшим коэффициентом меняющим знак.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, нелокальное граничное условие, разрешимость, единственность.

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR HIGHER ORDER MIXED TYPE EQUATIONS

Pyatkov S.G. [1]
[1] *Yugra State University, Khanty-Mansiisk, Russia;*
pyatkovsg@gmail.com

We demonstrate solvability of a wide class of boundary value problems for mixed type equations of higher order including those with nonlocal boundary conditions of general form. The results rely on resolvent *estimates for ordinary differential operators with a senior coefficient changing its sign.*

Key words: mixed type equation, nonlocal boundary condition, solvability, uniqueness.

Введение

Мы рассматриваем уравнения вида

$$a_l(t)u^{(l)} + a_{l-1}(t)u^{(l-1)} + \sum_{k=0}^{l-2} \sum_{|\alpha|<\frac{2m(l-1-k)}{l-1}} a_{k,\alpha}(t,x)D_t^k D_x^\alpha u - \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x)D^\alpha u - \lambda u = f, \quad (1)$$

где $x \in G \subset \mathbb{R}^n$, G – ограниченная область с границей $\Gamma = \partial G \in C^{2m}$, $t \in (0,T)$. Пусть $Q = (0,T) \times G$.

Основной особенностью этого уравнения является тот факт, что коэффициент a_l может менять знак на интервале $(0,T)$ и таким образом уравнение является уравнением смешанного типа. Уравнение (1) дополняется краевыми условиями вида

$$U_i u = \sum_{j=0}^{l-1} (\alpha_{i,j}u^{(j)}(0,x) + \beta_{i,j}u^{(j)}(T,x)) = 0, \quad i = 1,2,\ldots,l, \quad (2)$$

$$B_j u|_\Gamma = \sum_{|\alpha|\le m_j} b_{\alpha,j}(x)D^\alpha u = 0, \quad j = 1,2,\ldots,m, \quad (3)$$

В работах М.А. Лаврентьева, И.Н. Векуа, С.А. Христиановича, С.А. Чаплыгина, К.Г. Гудерлея и других было указано на важность изучения краевых задач для уравнений смешанного типа в связи с задачами, возникающими в трансзвуковой газовой динамике, в безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака и во многих прикладных задачах механики. В исследованиях Г. Фикеры, О.А. Олейник, Е.В. Радкевича и ряда других авторов (см. библиографию в [1]) были предложены новые подходы и методы для построения единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений. В.Н. Враговым [2,3] было начато построение общей теории краевых задач для уравнений смешанного типа второго и высокого порядков с произвольным многообразием изменения типа, в частности, для гиперболо-параболических уравнений. В настоящее время имеется уже довольно много работ, посвященных краевым задачам для уравнений смешанного типа второго порядка. Имеется и ряд монографий, в основном посвященных уравнениям второго порядка на плоскости. Выделим книгу [6], где результаты Врагова В.Н. были развиты и дополнены. Среди недавних работ отметим, например, работы [5-10]. Фактически результаты, приведенные ниже это следствия из общих результатов работы [10]. Мы рассматриваем общие краевые условия вида (2), (3) и нечетное l и при определенных условиях показываем разрешимость задачи вида (1)–(3) в случае, когда величины $k(0), k(T)$ одного знака.

Основные результаты

Сформулируем основные условия на данные. Пусть оператор B, заданный дифференциальным выражением $Bu = \sum_{|\alpha|=2m} b_\alpha(x) D^\alpha u$ и граничными условиями $B_j u|_\Gamma = \sum_{|\alpha|\le m_j} b_{\alpha,j}(x) D^\alpha u|_\Gamma = 0$, где $x \in G \subset \mathbb{R}^n$, эллиптичен. В качестве области определения $D(B)$ возьмем пространство состоящее из функций $u \in W_2^{2m}(G)$ таких, что $B_j u|_\Gamma = 0$. Пусть для некоторого $\theta_B > \pi/2$ и всех λ_1 таких что $|arg(-\lambda_1)| \le \theta_B$ выполнено

(i)

$$(-1)^m \frac{\sum_{|\alpha|=2m} b_\alpha(x)\xi^\alpha}{|\sum\limits_{|\alpha|=2m} b_\alpha(x)\xi^\alpha|} \ne e^{i \arg \lambda_1}$$

для всех векторов $\xi \in R^n \setminus \{0\}$, любых $x \in \overline{\Omega}$;

(ii) полиномы (по t) $\sum_{|\alpha|=m_k} b_{k,\alpha}(x)(\xi + t\eta)^\alpha$, $k = 1, 2, ..., m,$ линейно независимы по модулю полинома $\prod_{k=1}^m (t - t_k^+(\xi, \lambda_1))$ для $x \in \partial\Omega$, и всех векторов η, $\xi \in R^n \setminus \{0\}$ - нормальных и соответственно касательных к границе в точке x. Здесь числа $t_k^+(\xi, \lambda_1), k = 1, 2, ..., m,$ – корни с положительными мнимыми частями полинома (по t) $(-1)^m \sum_{|\alpha|=2\nu} b_\alpha(x)(\xi + t\eta)^\alpha - \lambda_1.$

Пусть $b_\alpha \in W_\infty^{2m}(G)$ и $b_{j,\alpha} \in C^{2m-m_j}(\Gamma)$ при всех j, α. Далее считаем, что $a_{k,\alpha}(t,x) \in L_\infty(0,T; C^{|\theta|+\varepsilon_0}(\overline{G}))$ для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ и $\theta \ne 0$, $|\theta| < 1/2$, при $\theta = 0$, считаем, что $a_{k,\alpha}(t,x) \in L_\infty(Q)$ при всех k, α.

Предполагаем также, что

$$a_{l-1} \in C([0,T]), a_l \in C^1([0,T]) \cap W_2^{l-1}((0,\delta_0) \cup (T-\delta_0, T)) \qquad (4)$$

для некоторого $\delta_0 \in (0, T/2)$ и выполнено неравенство

$$(-1)^{(l+1)/2}(a_{l-1}(t) - \frac{1}{2}a_{lt}(t)) \geq \delta_1 > 0 \ \forall t \in [0, T], \ \delta_1 = const. \tag{5}$$

Считаем, что коэффициенты a_{l-1}, a_l вещественны и $a_l(0), a_l(T) > 0$. Случай $a_l(0), a_l(T) < 0$ сводится к этому после замены $\tau = T - t$. Внутри промежутка $[0, T]$ функция $a_l(t)$ может менять знак. Пусть $\{\omega_k\}$ – корни степени l из -1. Положим $\nu = (l-1)/2$ при $l = 4s+1$ ($s = 0, 1, \ldots$) и $\nu = (l+1)/2$ при $l = 4s+3$ ($s = 0, 1, \ldots$), $S_\beta = \{\rho : \ (\pi/2 + \beta)/l \leq arg\, \rho \leq (3\pi/2 - \beta)/l\}$, где $\beta \in (0, \pi/2)$. В каждом из этих случаев найдется перенумерация чисел ω_k такая, что $Re\, \rho\omega_i \leq -|\rho| \sin(\beta/l)$ для всех $i \leq \nu$ и $|\rho| \sin(\beta/l) \leq Re\, \rho\omega_i$ для всех $i \geq \nu + 1$ и всех $\rho \in S_\beta$.

Введем числа $a_{ij} = \alpha_{i,k_i}(\frac{\omega_j}{(a_l(0))^{1/l}})^{k_i}$ при $= 1, 2, \ldots, l$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$ и $a_{ij} = \beta_{i,k_i}(\frac{\omega_j}{(a_l(T))^{1/l}})^{k_i}$ при $= 1, 2, \ldots, l$, $j = \nu + 1, \ldots, l$

Запишем матрицу

$$\tilde{\Theta}_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,l} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,l} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{l1} & a_{l2} & \ldots & a_{l,l} \end{pmatrix},$$

Соответствующее условие корректности запишется в виде

$$det\, \tilde{\Theta}_0 \neq 0. \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (4)–(6), *и другие условия сформулированные выше. Пусть также* $f \in L_2(0, T; W_2^\theta(G))$ ($|\theta| < 1/2$). *Тогда найдется* $\lambda_0 \geq 0$ *такое, что при* $\lambda \geq \lambda_0$ *существует единственное решение задачи* (1)–(3) *такое, что* $u \in L_2(0, T; W_2^{2m}(G))$, $Bu, u^{(l-1)} \in L_2(0, T; W_2^\theta(G))$, $a_l u^{(l-1)} \in W_2^1(0, T; W_2^\theta(G))$.

Замечание. При выполнении других условий на знаки величин $a_l(0), a(T)$ утверждение теоремы также справедливо, но уже при других условиях на граничные операторы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Олейник О.А., Радкевич Е.В.* Уравнения второго порядка с неорицательной характеристической формой // Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анал. 1971. С. 7–252.

2. *Врагов В.Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983.
3. *Врагов В.Н.* К теории краевых задач для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. - 1977. - Т. 13, №6.- С. 1098–1105.
4. *Егоров И.Е, Федоров В.Е.* Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1995.
5. *Dzhamalov S.Z.* The nonlocal boundary value problem with constant coefficients for the multidimensional equation of the mixed type of the second kind, the second order// Journal of Siberian Federal University. 2018, V. 11(4), C. 472–481.
6. *Джамалов С.З.* О гладкости одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения смешанного типа второго рода в пространстве // Журнал Средне-Волжского мат. общества. 2019, Т. 21, №1. С. 24–33.
7. *Чуешев А.В.* Об одном линейном уравнении смешанного типа высокого порядка // Сиб. матем. журн. 2002. Т. 43, №2. С. 454–472.
8. *Джамалов С.З., Пятков С.Г.* О некоторых классах краевых задач для многомерных уравнений смешанного типа высокого порядка // Сибирский математический журнал. 2020. Т. 61, №4, С. 777–795.
9. *Чуешев А.В.* Оценки резольвенты для обыкновенных дифференциальных операторов смешанного типа // Матем. тр. 2000. Т. 3, №1, С. 144–196.
10. *Пятков С.Г.* Краевые и обратные задачи для некоторых классов неклассических операторно-дифференциальных уравнений // Сибирский математический журнал. 2021. Т. 62, № 3, С. 603-618.

УДК 517.95

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рузиев М.Х. [1] **, Актамов Ф.С.** [2]
[1] *Институт Математики АН РУз, г. Ташкент, Узбекистан;*
[2] *Чирчикский государственный педагогический институт, г. Чирчик, Узбекистан;*
mruziev@mail.ru

В работе изучается задача с условием Франкля и Бицадзе-Самарского на линии вырождения и на параллельных характеристиках для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Единственность решения задачи доказывается с помощью принципа экстремума, а существование решения устанавливается методом интегральных уравнений.

Ключевые слова: краевая задача, единственность решения, существование решения, сингулярное интегральное уравнение, индекс уравнения.

A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR MIXED TYPE EQUATION WITH SINGULAR COEFFICIENTS

Ruziev M.Kh. [1] **, Aktamov F.S.** [2]
[1] *Institute of Mathematics, Academy of Sciences of Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;*
[2] *Chirchik State Pedagogical Institute, Chirchik, Uzbekistan;*
mruziev@mail.ru

In this paper we study a boundary-value problem with the Frankl and Bitsadze-Samarskii condition on the line of degeneracy and on parallel characteristics for a mixed-type equation with a singular coefficients. The uniqueness of the solution of the problem is proved using the extremum principle and the existence of a solution to the problem is established by the method of integral equations.

Key words: boundary-value problem, uniqueness, existence, singular integral equations, index of equation.

Пусть $D = D^{+} \cup D^{-} \cup I$ - область комплексной плоскости $z = x + iy$, где D^{+} -полуплоскость $y > 0$, D^{-} - конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками AC и BC уравнения

$$signy|y|^{m}u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{|y|^{1-\frac{m}{2}}}u_x + \frac{\beta_0}{y}u_y = 0, \tag{1}$$

исходящими из точек $A(-1,0)$, $B(1,0)$, и отрезком AB прямой $y = 0$, $I = \{(x,y) : -1 < x < 1, y = 0\}$. В (1) m, α_0, β_0 - некоторые действительные числа, удовлетворяющие условиям $m > 0$, $|\alpha_0| < \frac{m+2}{2}$, $-\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$.

Введем обозначения: $I_1 = \{(x,y) : -\infty < x < -1, y = 0\}$, $I_2 = \{(x,y) : 1 \leq x < \infty, y = 0\}$, C_0 и C_1 - соответственно точки пересечения характеристик AC и BC с характеристикой исходящей из точки $E(c,0)$, где $c \in I$ - произвольное фиксированное число.

Рассмотрим диффеоморфизм $q(x) \in C^{1}[c,1]$, переводящий отрезок $[c,1]$ в отрезок $[-1,c]$, причем $q'(x) < 0$, $q(1) = -1$, $q(c) = c$. Примером такой функции является $q(x) = p - kx$, где $k = \frac{1+c}{1-c}$, $p = 2c/(1-c)$, $p - k = -1$, $p - kc = c$.

В работе [1] для уравнения (1) в случае, когда $\alpha_0 = 0$, в ограниченной области была исследована задача, где характеристика AC была произвольным образом разбита на два куска (AC_0, C_0C) и на первом куске задавалось условие Трикоми, а на втором куске и параллельной ей характеристике - условие Бицадзе-Самарского.

Данная работа, посвященная исследованию задачи в неограниченной области, отличается от [1] тем, что здесь характеристика AC_0 освобождена от краевого условия(условия Трикоми), которое эквивалентно заменено нелокальным условием Франкля [2]-[3] на отрезке линии вырождения.

Задача A. Найти в области D функцию $u(x,y)$ со свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\bar{D})$ где $\bar{D} = \bar{D^{-}} \cup D^{+} \cup \bar{I}_1 \cup \bar{I}_2$;

2) $u(x,y) \in C^{2}(D^{+})$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

3) $u(x,y)$ является обобщенным решением класса R_1 [4] в области D^{-};

4) выполняется равенства

$$\lim_{R\to\infty} u(x,y) = 0, R^2 = x^2 + \frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}, y \geq 0;$$

5) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_{y=0} = \varphi_i(x), \; x \in \bar{I}_I, i = 1, 2$$

$$(1+x)^{\alpha} D^{1-\beta}_{-1,x} u[\theta_0(x)] = \mu(x)(x-c)^{\alpha} D^{1-\beta}_{c,x} u[\theta^*(x)] + \psi(x), c < x < 1,$$

$$u(q(x), 0) = \mu_0 u(x, 0) + f(x), \; c \le x \le 1,$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y \to +0} y^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y \to -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in I \setminus \{c\},$$

причем эти пределы при $x = -1$, $x = 1$, $x = c$ могут иметь особенности порядка ниже $1 - \alpha - \beta$, где $\alpha = \frac{m+2(\beta_0+\alpha_0)}{2(m+2)}$,

$\beta = \frac{m+2(\beta_0-\alpha_0)}{2(m+2)}$, $f(x), \psi(x), \varphi_i(x)$ - заданные функции, причем $f(x) \in C[c,1] \cap C^{1,\delta_0}(c,1)$, $f(1) = 0$, $f(c) = 0$, $\mu(x), \psi(x) \in C[c,1] \cap C^{1,\delta_1}(c,1)$, μ_0 -константа, функции $\varphi_i(x), i = 1, 2$, удовлетворяет условию Гельдера на любых отрезках $[-N, -1]$, $[1, N]$, $N > 1$, и для достаточно больших $|x|$ удовлетворяет неравенству $|\varphi_i(x)| \le M|x|^{-\delta}$, где δ, M - положительные постоянные, $D^{1-\beta}_{-1,x}$, $D^{1-\beta}_{c,x}$ - операторы дробного дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля [4], точками пересечения характеристик $C_0C(EC_1)$ с характеристикой, исходящей из точки $(x_0, 0)$, $x_0 \in (c, 1)$, являются

$$\theta(x_0) = \frac{x_0 - 1}{2} - i \left(\frac{m+2}{4}(x_0 + 1) \right)^{\frac{2}{m+2}},$$

$$\theta^*(x_0) = \frac{x_0 + c}{2} - i \left(\frac{m+2}{4}(x_0 - c) \right)^{\frac{2}{m+2}}.$$

Отметим, что задача A для уравнения (1) в случае, когда $\alpha_0 = 0$ в области D изучена в работе [5].

Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть выполнены условия $\varphi_i(x) \equiv 0$, $i = 1, 2$, $\psi(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 0$, $0 < \mu_0 < 1$, $\mu(x) \le 0$. Тогда задача A имеет лишь тривиальное решение.

Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть выполнены условия $q(x) = p - kx$, где $p = 2c/(1-c)$, $k = (1+c)/(1-c)$, $0 < \mu_0 < 1$, $\mu(x) \le 0$, $\beta_0 > \frac{2-m}{4}$. Тогда решение задачи A существует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.*Мирсабуров М.* Краевая задача для одного класса уравнений смешанного типа с условием Бицадзе-Самарского на параллельных характеристиках // Дифф. уравнения. 2001.Т.37. № 9.С. 1281–1284.

2.*Франкль Ф.И.* Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения // ПММ. 1956.Т.20. № 2.С. 196–202.

3. *Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.* Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Т. Изд-во НУУЗ, 2005.

4. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. Москва. Высшая школа,1985. 304 с.

5. *Рузиев М.Х.* Задача с условием Франкля и Бицадзе-Самарского на линии вырождения и на параллельных характеристиках для уравнения смешанного типа // Известия Вузов. Математика. 2012. № 8. С. 43–52.

УДК 517.95

О НЕКОТОРЫХ НЕРЕШЕННЫХ ЗАДАЧАХ В ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

Сабитов К.Б.

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак, Россия;
Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований Республики Башкортостан, г. Стерлитамак, Россия;
sabitov_fmf@mail.ru

В докладе приводятся результаты по расположению спектра задачи Трикоми для операторов смешанного эллиптико-гиперболического типа и нерешенные задачи в этом направлении. Приводятся новые нелокальные спектральные эллиптические задачи, которые в общем случае не исследованы. Также указаны нерешенные задачи по нелокальной задаче Франкля и задачам с отходом характеристики.

Ключевые слова: уравнения смешанного типа, спектральные задачи Трикоми, Франкля, задачи с отходом от характеристики, нерешенные задачи.

SOME UNSOLVED PROBLEMS IN THE THEORY OF MIXED TYPE EQUATIONS

Sabitov K.B.
Sterlitamak branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia; Sterlitamak Branch of the Institute for Strategic Studies of the Republic of Bashkortostan, Sterlitamak, Russia;
sabitov_fmf@mail.ru

The report presents the results of the arrangement range of the Tricomi problem for operators of mixed elliptic-hyperbolic type and unsolved problems in this area. New nonlocal spectral elliptic problems are presented that have not been investigated in the general case. Unsolved problems in the nonlocal Frankl problem and problems with characteristic deviation are also indicated.

Key words: equations of mixed type, spectral problems of Tricomi, Frankl, problems with a departure from the characteristic, unsolved problems.

Как известно, основными краевыми задачами в теории уравнений смешанного типа являются задачи Трикоми, Геллерстедта, Франкля, задачи с отходом от характеристики (обобщенная задача Трикоми, задача Моравец) и задачи со смещениями (по терминологии А.М. Нахушева). По результатам исследований этих задач опубликованы монографии [1 – 24]. Несмотря на полученные результаты, которые изложены в многочисленных статьях и приведенных монографиях, указанные выше основные краевые задачи до конца не исследованы. Здесь хотелось бы обратить внимание исследователей на следующие нерешенные задачи.

1. Прежде всего остается не до конца решенной задача о расположении спектра задачи Трикоми для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа. Рассмотрим бипараметрическое уравнение смешанного типа

$$(\mathrm{sgn} y)|y|^n u_{xx} + u_{yy} - \lambda |y|^n u = 0, \tag{1}$$

где $n = \mathrm{const} \geq 0$,

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_1, y > 0 \\ \lambda_2, y < 0, \end{cases}$$

λ_1 и λ_2 – заданные числовые, вообще говоря, комплексные параметры, в области D, ограниченной гладкой кривой Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A(0,0)$ и $B(l,0), l > 0$, и при $y < 0$ – характеристиками AC и CB уравнения (1).

Имеет место следующее утверждение.

Если в классе регулярных решений уравнения (1) существует решение задачи T, то оно единственно при всех λ_1 и λ_2, удовлетворяющих неравенству

$$2\mathrm{Re}\,\lambda_1 + \mathrm{Re}\,\lambda_2 > |\lambda_2| - 2p(p_1), \tag{2}$$

где $p = 2/(9\,\mathrm{mes}\,D_+)$ при $n = 0$, $p_1 = 1/C(D_+)$ при $n > 0$, $C(D_+) > 0$ – постоянная, зависящая только от размеров области $D_+ = D \cap \{y > 0\}$.

Когда λ_1 и λ_2 – вещественные постоянные задача T имеет только нулевое решение при $\lambda_2 < 0$ и $\lambda_1 > \lambda_2 - p(p_1)$.

Остается нерешенным вопрос о единственности решения задачи T при $0 \leq \lambda_1 \leq -\lambda_2 - p(p_1)$.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то из (2) следует

$$|\lambda| < 3\mathrm{Re}\,\lambda + 2p(p_1). \tag{3}$$

Если $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = -\lambda$, то из неравенства (2) получим

$$|\lambda| < \mathrm{Re}\,\lambda + 2p(p_1). \tag{4}$$

Множества точек λ, удовлетворяющих неравенствам (3) и (4), не содержит точек спектра задачи T_λ. При этом, когда $\lambda_2 < 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 \leq -p(p_1)$, остается открытым вопрос о единственности решения задачи T. Может быть, здесь по аналогии с результатами [21, § 2.4] имеет эффект влияния гиперболической части на единственность решения задачи T, т.е. при $\lambda_1 \geq 0$, что в области эллиптичности обеспечивает справедливость принципа экстремума, найдется такое значение $\lambda_2 < 0$, при котором однородная задача T имеет ненулевое решение.

Не выяснен вопрос о том, будут ли точки спектра находиться в параболе Карлемана по аналогии с эллиптическими операторами второго порядка, т.е. существует ли такая кривая на комплексной плоскости (λ), разделяющая эту плоскость на части, в одной из которых содержатся точки спектра задачи T_λ, а в другой их там нет.

2. Следующая проблема, на которую следует обратить внимание, это задача T_λ [21, § 2.7], которая сведена к новой нелокальной эллиптической задаче (2.7.2)–(2.7.4) и (2.7.7) при $n = 0$ и (2.7.2)–(2.7.4) и

(2.7.46) при $n > 0$. Каждая из этих задач решена только в случае, когда эллиптическая часть D_+ области D представляет собой сектор с центром в точке $A(0,0)$. В общем виде, т.е. когда кривая Γ является произвольной из класса Ляпунова, они не исследованы.

В этом случае следует отметить, что на основании известных результатов задача Т для уравнения

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} + \lambda K(y)u = 0, \tag{5}$$

где $K(y) = (\mathrm{sgn} y)|y|^n, n = \mathrm{const} > 0, \lambda$ – комплексный параметр, при некоторых ограничениях на подход кривой Γ к оси $y = 0$ и длину l линии изменения типа эквивалентно редуцируется к разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Теперь, пользуясь теорией Фредгольма, можно утверждать, что множество собственных значений задачи T_λ не более чем счетно, точкой их сгущения может быть только бесконечно удаленная точка комплексной плоскости (λ). Но из этой теории не следует решение задачи о расположении спектра задачи T_λ. Поэтому желательно исследовать указанные выше нелокальные эллиптические спектральные задачи другими методами.

3. Задача Франкля [21, § 4.1] в силу граничного условия

$$u(0,y) - u(0,-y) = \varphi(y), \quad 0 \le y \le a,$$

является нелокальной в отличие от задач T и M. По видимому, из-за этого до сих пор не выяснен вопрос: имеет ли принцип экстремума задачи Франкля для уравнения

$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + u_{yy} - \lambda(y)u = 0,$$

аналогично задаче T. Здесь можно отметить только работу [25], где при достаточно малой длине отрезка OC (линии изменения типа уравнения) установлен принцип экстремума. Можно ли снять данное ограничение на длину отрезка OC?

По аналогии с задачей Трикоми по данной задаче предстоит исследовать те же вопросы, которые мы отметили выше в пп. 1 и 2, т.е. для уравнения (1) рассмотреть задачу Франкля и

1) получить теоремы единственности при разных λ_1 и λ_2, затем, в частности, при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = -\lambda$;

2) исследовать задачу Φ_λ при $n > 0$: найти собственные значения, построить соответствующую систему собственных функций,

исследовать их на полноту и базисность, построить решение задачи Франкля для уравнения (5) при $n > 0$ методом спектральных разложений;

3) выяснить структуру расположения точек спектра задачи Φ_λ .

4. Как известно, обобщенная задача Трикоми (задача M) является наиболее трудной среди краевых задач для уравнений смешанного типа и до сих пор, даже для известных уравнений смешанного типа (кроме уравнения Лаврентьева-Бицадзе) не получены теоремы единственности регулярных или обобщенных решений этой задачи без ограничений (кроме гладкости) на эллиптическую часть границы области. Поэтому предлагается установить результат теоремы 5.2.1 [21, с. 256] при условии, что Γ – произвольная кривая из класса Ляпунова, т.е. без ограничений, что на ней отсутствуют точки, при переходе которых $n_1(s)$ меняет знак, а $n_2(s) = 1$.

Не исследована соответствующая спектральная задача M_λ для уравнения (5) при $n > 0$. Здесь также, как в случае задачи T_λ , предстоит ответить на вопросы, поставленные выше в пп. 1 и 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Трикоми Ф.* О линейных уравнения смешанного типа. М.-Л.: Гостехиздат, 1947. 192 с.

2. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.

3. *Гудерлей К.Г.* Теория околозвуковых течений. М.: ИЛ, 1960. 421 с.

4. *Берс Л.* Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: ИЛ, 1961. 208 с.

5. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970. 296 с.

6. *Салахитдинов М.С.* Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент: Фан, 1974. 156 с.

7. *Джураев Т.Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. — Ташкент: Фан, 1979. 238 с.

8. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.

9. *Врагов В.Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1983. 84 с.

10. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа, 1985. 304 с.

11. *Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент: Фан, 1986. 220 с.

12. *Моисеев Е.И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: МГУ, 1988. 150 с.

13. *Кузьмин А.Г.* Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1990. 208 с.

14. *Салахитдинов М.С., Уринов А.К.* Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Ташкент: ФАН, 1997. 165 с.

15. *Хачев М.М.* Первая краевая задача для линейных уравнений смешанного типа. Нальчик: Изд-во "Эльбрус". 1998. 168 с.

16. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.

17. *Сабитов К.Б., Биккулова Г.Г., Гималтдинова А.А.* К теории уравнений смешанного типа с двумя линиями изменения типа. Уфа: Гилем, 2006. 150 с.

18. *Репин О.А., Килбас А.А., Маричев О.И.* Краевые задачи для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами. Самара: Изд-во Самарского гос. экономического ун-та, 2008. 275 с.

19. *Салахитдинов М.С., Исломов Б.И.* Уравнения смешанного типа с двумя линиями изменения типа. Ташкент: Ташк. гос. пед. ун-т, 2009. 264 с.

20. *Салахитдинов М.С., Уринов А.К.* К спектральной теории уравнений смешанного типа. Ташкент: ФАН, 2010. 356 с.

21. *Сабитов К.Б.* К теории уравнений смешанного типа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. 304 с.

22. *Хайруллин Р.С.* Задача Трикоми для уравнения второго рода с сильным вырождением. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2015. 236 с.

23. *Сабитов К.Б.* Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. М.: Наука, 2016. 272 с.

24. *Хайруллин Р.С.* Краевые задачи для уравнения смешанного типа второго рода. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2020. 353 с.

25. *Майоров И.В.* О принципе экстремума для одной задачи Франкля // Сиб. матем. журн. 1966. Т. 7. № 5. С. 1068–1075.

УДК 517.95

КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Сабитов К.Б. [1,2] , Бурханова И.А. [1]

[1] *Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак, Россия;*

[2] *Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований Республики Башкортостан, г. Стерлитамак, Россия;*

sabitov_fmf@mail.ru, irishka_burkhanova@mail.ru

В работе изучена обратная задача для уравнения смешанного типа со степенным вырождением на переходной линии по определению его правой части, зависящей от пространственной координаты. Установлен критерий единственности решения задачи.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, вырождение степенного вида, обратная задача, критерий единственности.

A CRITERION FOR THE UNIQUENESS OF A SOLUTION TO AN INVERSE PROBLEM FOR A DEGENERATE MIXED-TYPE EQUATION

Sabitov K.B. [1,2] , Burkhanova I.A. [2]

[1] *Sterlitamak branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia;*

[2] *Sterlitamak Branch of the Institute for Strategic Studies of the Republic of Bashkortostan, Sterlitamak, Russia;*

sabitov_fmf@mail.ru, irishka_burkhanova@mail.ru

In this paper, we study the inverse problem for a mixed-type equation with power degeneracy on a transition line by definition of its right-hand side, depending on the spatial coordinate. A criterion for the uniqueness of the solution of the problem is established.

Key words: equation of mixed type, degeneration of power type, inverse problem, uniqueness criterion.

Рассмотрим уравнение смешанного типа со степенным вырождением

$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + u_{yy} - bK(y)u = f(x), \tag{1}$$

в прямоугольной области

$$D = \{(x, y) |\, 0 < x < l,\, -\alpha < y < \beta\},$$

где $K(y) = (sign\, y)|y|^n$, n, l, α и β – заданные положительные числа, а b – любое заданное действительное число, и следующую обратную задачу.

Обратная задача. *Найти функции $u(x, y)$ и $f(x)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u(x, y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{2}$$

$$f(x) \in C(0, l) \cap L_2[0, l]; \tag{3}$$

$$Lu(x, y) \equiv f(x), \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-; \tag{4}$$

$$u(0, y) = u(l, y) = 0, \quad -\alpha \le y \le \beta; \tag{5}$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x), \quad u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l; \tag{6}$$

$$u_y(x, -\alpha) = g(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{7}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(x)$ – заданная достаточно гладкие функции, причем $\varphi(0) = \lambda(l) = 0$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$, $g(0) = g(l) = 0$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Отметим, что в постановке обратной задачи условие (7) является дополнительным условием для определения функции $f(x)$. Прямая задача (2), (4) – (6), т.е. задача Дирихле, при $f(x) \equiv 0$ ранее изучалась во многих работах [1 – 7]. Методом работы [7] в статьях [8, 9] была исследована задача (2) – (7) при $n = 0$, т.е. для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева-Бицадзе. В этих работах был установлен критерий единственности решения задачи. Функции $u(x, y)$ и $f(x)$ были построены в виде суммы ряда по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи Штурма-Лиувилля. При обосновании сходимости рядов возникла проблема малых знаменателей, в связи с чем были найдены оценки об отделенности от нуля в зависимости от значений отношения α/l сторон прямоугольника D_- из гиперболической части смешанной области D. Эти оценки позволили обосновать сходимость рядов в классах (2) и (3) в случае, когда $n = 0$.

В данной работе рассматривается уравнение смешанного типа (1) со степенным вырождением на переходной линии, которое имеет важные приложения в газовой динамике в теории околозвуковых течений жидкостей и газов [10, 11], [12, с. 153, 189], [13, с. 104–169], [14, с. 273–292], [15, с. 383–398]. Здесь также установлен критерий единственности решения задачи (2) – (7) при всех $n > 0$ и b.

Теорема 1. *Если существует решение задачи* (2) – (7), *то оно единственно только тогда, когда при всех* $k \in \mathbb{N}$ *выполнены условия*

$$\Delta(k) = E_k(\alpha,\beta) = \sqrt{\alpha\beta}\,{\omega_k^-}'(-\alpha)\Big[I_\nu(p_k\beta^q)\overline{Y}_\nu(p_k\alpha^q)+$$

$$+J_\nu(p_k\alpha^q)K_\nu(p_k\beta^q)\Big] - \sqrt{\beta}\omega_k^-(-\alpha)[K_\nu(p_k\beta^q)\Big(\sqrt{-y}J_\nu(p_k(-y)^q)\Big)'_{y=-\alpha}+$$

$$+I_\nu(p_k\beta^q)\Big(\sqrt{-y}\,\overline{Y}_\nu(p_k(-y)^q)\Big)'_{y=-\alpha}]+$$

$$+\sqrt{\alpha}\omega_k^+(\beta)[\overline{Y}_\nu(p_k\alpha^q)\Big(\sqrt{-y}J_\nu(p_k(-y)^q)\Big)'_{y=-\alpha}-$$

$$-J_\nu(p_k\alpha^q)\Big(\sqrt{-y}\,\overline{Y}_\nu(p_k(-y)^q)\Big)'_{y=-\alpha}] \neq 0, \qquad (8)$$

где

$$\omega_k^+(\beta) = \frac{1}{q}\sqrt{\beta}I_{1/(2q)}(p_k\beta^q)\int\limits_0^\beta \sqrt{t}K_{1/(2q)}(p_kt^q)\,dt-$$

$$-\frac{1}{q}\sqrt{\beta}K_{1/(2q)}(p_k\beta^q)\int\limits_0^\beta \sqrt{t}I_{1/(2q)}(p_kt^q)\,dt,$$

$$\omega_k^-(-\alpha) = \frac{\pi}{2q}\sqrt{-\alpha}J_{1/(2q)}(p_k(-\alpha)^q)\int\limits_{-\alpha}^0 \sqrt{-t}Y_{1/(2q)}(p_k(-t)^q)\,dt-$$

$$-\frac{\pi}{2q}\sqrt{-\alpha}Y_{1/(2q)}(p_k(-\alpha)^q)\int\limits_{-\alpha}^0 \sqrt{-t}J_{1/(2q)}(p_k(-t)^q)\,dt,$$

$J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ – соответственно функции Бесселя первого и второго рода, $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ – модифицированные функции Бесселя, $p_k = \frac{1}{q}\sqrt{\mu^2+\mu_k^2} = \frac{\lambda_k}{q}$, $q = \frac{m+2}{2}$, $\nu = \frac{1}{2q}$.

Пусть при некотором $k = m \in \mathbb{N}$ нарушено условие (8), т.е. $\Delta(m) = 0$. Тогда однородная задача (2) – (7) (где $\varphi(x) = \psi(x) = g(x) \equiv 0$) имеет ненулевое решение

$$u_m(x,y) = \widetilde{u}_m(y)\sin\mu_m x, \quad f_m(x) = f_m\sin\mu_m x,$$

где

$$\widetilde{u}_m(y) = \frac{f_m}{\widetilde{\Delta}(m)}\Big\{\omega_k^{-\prime}(-\alpha)C_q\sqrt{\alpha\, y}\Big[I_\nu(p_m y^q)J_{-\nu}(p_m\alpha^q)+$$

$$+I_{-\nu}(p_m y^q)J_\nu(p_m\alpha^q)\Big]-\omega_m^{-}(-\alpha)C_q\sqrt{\alpha\, y}p_k q\alpha^{q-1}\Big[I_\nu(p_m y^q)J_{1-\nu}(p_m\alpha^q)-$$

$$-I_{-\nu}(p_m y^q)J_{\nu-1}(p_m\alpha^q)\Big]+\omega_m^{+}(y)\widetilde{\Delta}(m)\Big\} = \frac{f_m}{\widetilde{\Delta}(m)}E_m(\alpha, y), \quad y > 0,$$

$$\widetilde{u}_m(y) = \frac{f_m}{\widetilde{\Delta}(m)}\Big\{\omega_k^{-\prime}(-\alpha)C_q\sqrt{-\alpha\, y}\Big[J_\nu(p_m\alpha^q)J_{-\nu}(p_m(-y)^q)-$$

$$-J_\nu(p_m(-y)^q)J_{-\nu}(p_m\alpha^q)\Big]+\omega_m^{-}(-\alpha)C_q\sqrt{-\alpha\, y}p_k q\alpha^{q-1}\Big[J_\nu(p_m(-y)^q)*$$

$$*J_{1-\nu}(p_m\alpha^q)+J_{-\nu}(p_m(-y)^q)J_{\nu-1}(p_m\alpha^q)\Big]+\omega_m^{-}(y)\widetilde{\Delta}(m)\Big\}, \quad y < 0,$$

при условии, что

$$\widetilde{\Delta}(m) = \sqrt{\alpha}\,\overline{Y}_\nu(p_m\alpha^q)\Big(\sqrt{-y}J_\nu(p_m(-y)^q)\Big)'_{y=-\alpha}-$$

$$-\sqrt{\alpha}J_\nu(p_m\alpha^q)\Big(\sqrt{-y}\,\overline{Y}_\nu(p_m(-y)^q)\Big)'_{y=-\alpha} \neq 0.$$

Теперь естественно возникает вопрос о нулях выражения $\Delta(k)$ при некоторых k .

Лемма 1. *Выражение* $\Delta(k)$ *не имеет нулей при больших* k *и оно растет по закону*

$$I_\nu(p_k\beta^q)p_k^{-3\nu} = O\Big(e^{p_k\beta^q}p_k^{-3\nu-1/2}\Big).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А.В.* Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа // ДАН СССР. 1953. Т. 122. №. 2. С. 167–170.

2. *Шабат Б.В.* Примеры решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа // ДАН СССР. 1953. Т. 122. №. 3. С. 386–389.

3. *Cannon J.R.* Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinius coefficient // Ann. Math. pura ed Appl. 1963. V. 62. P. 371–377.

4. *Нахушев А.М.* Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области // Дифференциальные уравнения. 1970. Т. 6. № 1. С. 190–191.

5. *Хачев М.М.* Задача Дирихле для уравнения Трикоми в прямоугольнике // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 1. С. 151–160.

6. *Солдатов А.П.* Задача типа Дирихле для уравнения Лаврентьева–Бицадзе. I, II // ДАН. 1993. Т. 332. № 6. С. 696–698; Т. 333. № 1. С. 16–18.

7. *Сабитов К.Б.* Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области // ДАН. 2007. Т. 413. №. 1. С. 23–26.

8. *Сабитов К.Б., Хаджи И.А.* Краевая задача для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с неизвестной правой // Изв. вузов. Матем. 2011. № 5. С. 44–52.

9. *Хаджи И.А.* Обратная задача для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева–Бицадзе // Матем. заметки. 2012. Т. 91. Вып. 6. С. 908–919.

10. *Франкль Ф.И.* О задачах Чаплыгина для смешанных до и сверхзвуковых течений // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1945. Т. 9. № 2. С. 121–142.

11. *Франкль Ф.И.* К теории сопел Лаваля // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1945. Т. 9. № 5. С. 387–422.

12. *Гудерлей К.Г.* Теория околозвуковых течений. М.: ИЛ., 1960. 421 с.

13. *Берс Л.* Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: ИЛ., 1961. 208 с.

14. *Овсянников Л.В.* Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.

15. *Черный Г.Г.* Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.

УДК 517.95

ABOUT NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE DEGENERATING MIXED TYPE EQUATION WITH CAPUTO FRACTIONAL DIFFERENTIAL OPERATOR

Ochilova N.K.
Tashkent financial institute, Tashkent, Uzbekistan;
nargiz.ochilova@gmail.com

The existence and the uniqueness of solution of non-local problem for degenerating mixed type equation is investigated. The uniqueness of solution is proved using by an extremume principle. The existence of solution is proved by the method of integral equations.

Key words: Caputo fractional derivative, degenerating equation, parabolic-hyperbolic type, existence and uniqueness of solution, boundary value problem.

In a series of papers (see [1], [2],[3]) the authors considered some classes of boundary value problems for mixed type non degenerating and degenerating differential equations involving Caputo and Riemann-Liouville fractional derivatives of order .

We consider equation:

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - {}_{\mathbb{C}}D_{oy}^{\alpha}u, & y > 0, \\ (-y)^m u_{xx} - x^n u_{yy}, & y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

where $m, n = const > 0$,

$${}_{\mathbb{C}}D_{oy}^{\alpha}u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^y (y-t)^{-\alpha} u_t(x,t)dt, \;\; 0 < \alpha < 1. \tag{2}$$

Let's Ω domain, bounded with segments:
$A_1A_2 = \{(x,y) : x = 0, 0 < y < h\}$, $B_1B_2 = \{(x,y) : x = 1, 0 < y < h\}$, $A_2B_2 = \{(x,y) : y = h, 0 < x < 1\}$ at the $y > 0$, and by the characteristics:

$$A_1C : \; \frac{1}{q}x^q - \frac{1}{p}(-y)^p = 0, \; B_1C : \; \frac{1}{q}x^q + \frac{1}{p}(-y)^p = 1$$

of equation (1) at $y<0$, where $A_1\,(0;0)\,,\ A_2\,(0;h)\,,\ B_1\,(1;0)\,,\ B_2\,(1;h)$ and $C\left(\left(\frac{q}{2}\right)^{1/q},\quad -\left(\frac{p}{2}\right)^{1/p}\right)$, $2q=m+2$, $2p=n+2$, $h=q^{1/q}$ and that $m>n$.

Introduce designations: $\theta(x)=\left(\frac{x^q}{2}\right)^{1/q}-i\left(\frac{p}{q}\frac{x^q}{2}\right)^{1/p}$, $\Omega^+=\Omega\cap(y>0)$, $\Omega^-=\Omega\cap(y<0)$, $I_1=\{y=0,\ 0<x<1\}$, $I_2=\{x=0,\ 0<y<h\}$ and

$$2\alpha_1=n/(n+2),\quad 2\beta_1=m/(m+2),0<\alpha_1<\beta_1<\frac{1}{2}. \tag{3}$$

For the equation (1), we consider the following

Problem Find a solution $u(x,y)$ of equation (1) from the following class of functions:
$\Delta=\left\{u(x,y):\ u(x,y)\in C(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega^-),\ u_{xx}\in C\,(\Omega^+),\,u_x\in C\,(\Omega^+\cup B_1B_2)\,,\right.$ $\left. {}_CD^{\alpha}_{oy}u\in C\,(\Omega^+)\right\}$
satisfies boundary conditions:

$$u(x,y)\left.\right|_{x=0}=\varphi_1(y),\quad 0\leqslant y\leqslant h, \tag{4}$$

$$u_x(x,y)\left.\right|_{x=1}=\varphi_2(y),\quad 0\leqslant y<h \tag{5}$$

$$\frac{d}{dx^{2q}}(x^{2q})^{\frac{1-\alpha_1-\beta_1}{2}}F_{0x}\begin{bmatrix}\frac{\alpha_1+\beta_1-1}{2}, & \frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\\ \beta_1, & x^{2q}\end{bmatrix}(x^{2q})^{\frac{2\alpha_1-1}{2}}u\,[\theta\,(x)]=$$

$$=a(x)u_y(x,0)+b(x)u_x(x,0)+c(x)u(x,0)+d(x),\,0<x<1,$$

and gluing condition:

$$\lim_{y\to+0}y^{1-\alpha}u_y(x,+0)=u_y(x,-0),\ (x,0)\in A_1B_1,$$

where $\varphi_1(y),\ \varphi_2(y)\,,\ a(x),\ \ b(x)\,,\ c(x),\ \ d(x)$ are given functions.

Theorem 1. If satisfy conditions $0<\alpha<1$ and (3) then, the solution is unique.[3]

Theorem 2. If satisfies all conditions of the Theorem 1. and $\varphi_1(y),\ \varphi_2(y)\in C\,[0,h]\cap C^1\,(0,h)\,;\ \ a(x),\,b(x),c(x)\in C^1[0,1]\cap C^2\,(0,1)$ than the solution of the investigating problem is exist.

REFERENCES

1. O.Kh. Abdullaev. About a problem for loaded parabolic-hyperbolic type equation with fractional derivatives, International journal of differential equations., Article ID 9815796, 12 pages. (2016)
2. A.A. Kilbas., O. A. Repin. An analog of the Tricomi problem for a mixed type equation with a partial fractional derivative, Fractional Calculus and Applied Analysis. vol. 13, no. 1, pp. 69–84.(2010)
3. B.I.Islomov., N.K.Ochilova. About a problem for the degenerating mixed type equation fractional derivative.// Vestnik KRAUNS.Fiz.-Mat.Nauki. №1(17). C. 22-32. ISSN 2079-6641. DOI: 10.18454/2079-6641-2017-17-1-22-32. MSC 76W05, 86A25. http://mfit.ikir.ru.(2017.)

УДК 517.95

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИИ

Усмонов Б.З.
Чирчикский Государственный педагогический институт,
г. Чирчик, Узбекистан;
bakhtiyer.usmanov@mail.ru

Настоящая работа посвящена постановке и изучению одной краевой задачи для уравнения третьего порядка эллиптико-гиперболического типа в прямоугольной области Доказана единственность, существование и устойчивости решения поставленной задачи.

Ключевые слова: уравнение третьего порядка, регулярное решение, метод Фурье, метод спектрального анализа, критерий единственности, существование, устойчивость.

A BOUNDARY PROBLEM FOR A THIRD-ORDER ELLIPTICO-HYPERBOLIC EQUATION IN A RECTANGULAR DOMAIN

Usmonov B.Z.

Chirchik State Pedagogical Institute, Chirchik, Uzbekistan;
bakhtiyer.usmanov@mail.ru

The present work is devoted to the formulation and study of a boundary value problem for a third-order equation of elliptic-hyperbolic type in a rectangular domain. The uniqueness, existence and stability of the solution to the problem posed is proved.

Key words: third order equation, regular solution, Fourier method, spectral analysis method, uniqueness criterion, existence, stability.

Краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка, когда главной часть оператора содержит производную по x или y в смешанной области изучены работах [1 – 3].

В последние годы К.Б. Сабитов [4] предложил новый подход - метод спектральных разложений для обоснования единственности и существования решения прямых задач для модельного уравнения смешанного типа в прямоугольной области. Таким же методом в работах [5 – 13] решены прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического и эллиптико-гиперболического типов второго порядка.

Исходя из этого, в данной работе изучается однозначной разрешимости, поставленной задаче для общего уравнения третьего порядка эллиптико-гиперболического типа в прямоугольной области.

В прямоугольной области $D = \{(x,y): \ 0 < x < 1, \ -p < y < q\}$ рассмотрим уравнение

$$\left(b\frac{\partial}{\partial y} + c\right) Lu \equiv \left(b\frac{\partial}{\partial y} + c\right)(u_{xx} + (\operatorname{sign} y)\, u_{yy}) = 0, \tag{1}$$

где $p, \ q > 0$; $b, \ c \neq 0$ –заданные вещественные числа.

Введем обозначения:

$$D_1 = D \cap \{(x,y): \ x > 0, \ y > 0\}, \ D_2 = D \cap \{(x,y): \ x > 0, y < 0\},$$

$$J = \{(x,y): \ 0 < x < 1, \ y = 0\}, \quad D = D_1 \cup D_2 \cup J.$$

В области D исследуется следующая задача.

Задача 1. Найти в области D функцию $u(x,y)$ удовлетворяющую условиями:

$$u(x,y) \in C^1(\bar{D}), \ u(x,y) \in C^2(D_1 \cup D_2), \ u_{xxy}, \ u_{yyy} \in C(D_1 \cup D_2), \tag{2}$$

$$\left(b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)Lu=0, \quad (x,y)\in D_1\cup D_2, \tag{3}$$

$$u_x(0,y)=0,\ \ u_x(1,y)=0, \qquad -p\le y\le q, \tag{4}$$

$$u(x,-\alpha)=\varphi_1(x), \quad u(x,\beta)=\varphi_2(x)\,, \qquad 0\le x\le 1, \tag{5}$$

$$u_y(x,-\alpha)=g(x), \qquad 0\le x\le 1, \tag{6}$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $g(x)$ -заданные достаточно гладкие функции.

Уравнение (1) в области D равносильно уравнению эллиптико-гиперболического типа второго порядка с неизвестной правой частью

$$Lu\equiv u_{xx}+(\mathrm{sign\,y})\,u_{yy}=f(x,y), \quad f(x,y)=\left\{\begin{array}{ll} f(x)e^{-\frac{c}{b}y}, & y>0,\\ f(x)e^{-\frac{c}{b}y}, & y<0.\end{array}\right. \tag{7}$$

Тогда задача 1 сводится к следующей обратной задаче.

Задача 2. Найти в области D функцию $u(x,y)$ и $f(x,y)$, удовлетворяющие условиям (2), (4)-(6) и

$$Lu=f(x,y), \quad (x,y)\in D_1\bigcup D_2, \quad f(x)\in C\,[01]\cap L_2\,[0,1]\,. \tag{8}$$

Поставленную задачу будем решать методом разделения переменных $u\,(x,y)\,=\,X\,(x)\;Y\,(y)$. Соответствующая спектральная задача относительно $X\,(x)$ имеет следующую систему собственных чисел и собственных функций:

$$X_k(x):\ \ 1, \quad \sqrt{2}\cos\pi kx, \qquad k\in N. \tag{9}$$

Система (9) ортонормирована, полна и образует базис в пространстве $L_2\,[0,1]$.

Теорема 1. Если существует решение задачи 2, то оно единственно только тогда, когда выполнено условие

$$\delta_{pq}(k)=\frac{2c^2e^{-\frac{c}{b}p}}{b(c^2-(\pi k)^2\,b^2)}(c\;sh\pi kq-b\;ch\pi kq)-$$

$$-\frac{c}{\pi kb}\sqrt{ch2\pi kq}\sin(\pi kp+\tilde{\gamma}_k)+\sqrt{ch2\pi kq}\sin(\pi kp+\gamma_k)+$$

$$+\frac{e^{-\frac{2c}{b}q}(c^2+(\pi k)^2\,b^2)}{c^2-(\pi k)^2\,b^2}\ne 0 \quad \text{при всех}\, k\in N. \tag{10}$$

Теорема 2. Если выполнены условия $\varphi_j(x) \in C^3[0,1]$,

$$g(x) \in C^2[0,1],\ \varphi_j'(0) = \varphi_j'(1) = 0, \quad (j=1,2),\ |\delta_{p,q}(k)| \geq Ce^{\pi kq},$$

то в области D решение задачи 2 для уравнения (7) существует и дается формулой:

$$u(x,y) = u_0(y) + \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(y)\cos\pi kx, \quad f(x) = f_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} f_k \cos\pi kx,$$

где

$$u_0(y) = \begin{cases} c_0 y + d_0 - \left(\frac{b}{c}y - \frac{b^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}e^{-\frac{c}{b}y}\right) f_0, & y<0, \\ c_0 y + d_0 + \left(\frac{b}{c}y - \frac{b^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}e^{-\frac{c}{b}y}\right) f_0, & y>0, \end{cases}$$

$$u_k(y) = \begin{cases} c_k\cos\pi ky + d_k \sin\pi ky + \\ + \left(\frac{2bc^2(b\cos\pi ky - c\sin\pi ky)}{c^4-(\pi k)^4 b^4} - \frac{b^2 e^{-\frac{c}{b}y}}{c^2+(\pi k)^2 b^2}\right) f_k, & y<0, \\ c_k ch\pi ky + d_k sh\pi ky + \frac{b^2}{c^2-(\pi k)^2 b^2} f_k e^{-\frac{c}{b}y}, & y>0, \quad k \in N, \end{cases}$$

здесь постоянные c_0, d_0, f_0, c_k, d_k, f_k- определяется из условия (5) и (6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А.В., Салахитдинов М.С.* К теории уравнений смешанно-составного типа // Сибирский математический журнал. Новосибирск. 1961. Т. II. №1. С. 7–19.

2. *Салахитдинов М.С.* Уравнение смешанно-составного типа. Ташкент: Фан. 1974. 156 с.

3. *Джураев Т.Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан. 1979. 240 с.

4. *Сабитов К.Б.* Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области. // Доклады РАН. 2007. Т.413. №1. С. 23–26.

5. *Хачев М.М.* Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лаврентьев–Бицадзе в прямоугольной области // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14. №1. С. 136–139.

6. *Сабитов К.Б., Сафин Э.М.* Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Изв. вузов. Матем. 2010. №4. С. 55–62.

7. *Сабитов К.Б.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа третьего порядка // ДАН. 2009. Т. 427. № 5. С. 593–596.

8. *Сабитов К.Б., Сафин Э.М.* Обратная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // ДАН. 2009. Т. 429. № 4. С. 451–454.

9. *Сабитов К.Б., Сафин Э.М.* Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Изв. вузов. Математика. 2010. Т. 56. № 4. С. 55–62.

10. *Udalova G.Yu.* Inverse problem for equation of mixed elliptic-hyperbolic type // Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Univer-siteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya. 2010. Vol. 78. №4. P. 89–97.

11. *Сабитов К.Б., Сидоров С.Н.* Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием // Известия Вузов. Математика. 2015. № 1. С. 46–59.

12. *Сабитов К.Б.* Краевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 2. С. 186–196.

13. *Сабитов К.Б.* Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. М.: Наука. 2016. 272 с.

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

Материалы международной научной конференции
12 – 15 сентября 2021 г., г. Стерлитамак

Оригинал-макет изготовлен в СФ ГАНУ ИСИ РБ

Компьютерная верстка: С.Н. Сидоров

Лицензия на издательскую деятельность
ЛР № 021319 от 05.01.99 г.

Подписано в печать 30.08.2021 г. Формат $60 \times 84/16$.
Усл. печ.л. 22,1. уч. -изд. л. 24,0
Тираж 100 экз.
Изд. №   . Заказ

Редакционно издательский центр
Башкирского государственного университета
450076, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

Отпечатано на множительном участке
Башкирского государственного университета
450076, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

Материалы Международной научной конференции (г. Стерлитамак, 12 – 15 сентября 2021 г.)

Том I

За достоверность информации, изложенной в статьях, ответственность несут авторы. Мнение редколлегии может не совпадать с мнением авторов материалов. Статьи публикуются в авторской редакции

Лицензия на издательскую деятельность
ЛР № 021319 от 05.01.99 г.

Подписано в печать 06.09.2021 г. Формат 60х84/16.
Усл. печ. л. 22,08. Уч.-изд. л. 23,04.
Тираж 300 экз. (1-й завод 60 экз.). Изд. № 54. Заказ 270.

Редакционно-издательский центр
Башкирского государственного университета
450076, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

Отпечатано на множительном участке
Башкирского государственного университета
450076, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.